

Unruh 効果と相対論的量子纏れの空間的構造

防衛大学校理工学研究科後期課程

物質・基礎科学系専攻 応用・基礎物理学教育研究分野

松本 隆志

平成30年5月

目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	対称性変換群に基づく古典論、量子論そして粒子描像	4
2.1	変換群の余随伴軌道としての古典的位相空間	4
2.2	基点の変更と物理的対称性	7
2.3	対称性変換群の誘導表現と量子力学	7
2.3.1	古典論と量子論における対称性と Wigner の定理	7
2.3.2	Hilbert 空間の構成と誘導表現	8
2.4	多体系への拡張と粒子描像	10
第 3 章	背景計量下の場の量子論の概要	11
3.1	背景計量下の場の量子論	11
3.2	Rindler 系の物理的性質	14
3.3	Rindler 系と Minkowski 系での粒子描像の関係	15
第 4 章	背景計量下の場の量子論における局在性と基本的構成要素	22
4.1	加速度系での場の量子論における局在性	22
4.2	Rindler 系での局在性の確認	25
4.3	対称性変換群 $R \oplus R_+$ による基本的粒子描像	28
第 5 章	Rindler 空間における相対論的量子纏れの空間的構造	31
5.1	合成系における量子纏れ	32
5.2	Rindler 系での粒子描像と D 関数の定義	34
5.3	合成系としての Minkowski 系の真空と量子纏れ	36
5.4	ネガティブティと平行移動	40
5.4.1	Minkowski 系の真空のネガティブティ	40
5.4.2	平行移動と量子纏れ	43
5.5	参照基準系と量子纏れ	46
5.5.1	Minkowski 系 – Minkowski 系	48
5.5.2	Minkowski 系 – Rindler 系	50
5.5.3	Rindler 系 – Rindler 系	52
5.5.4	基本的粒子描像での比較と量子纏れ	55
5.6	遷移振幅でみる相関	56
第 6 章	結語	60

付録 A 対称性変換群の具体例と基本的粒子描像	62
A.1 $R(\otimes)R_+$ 群：半直線空間	62
A.1.1 余随伴軌道の構成	62
A.1.2 量子論と粒子描像	64
A.2 Poincaé 群：Minkowski 空間	66
A.2.1 Poincaé 群	66
A.2.2 余随伴軌道の構成	66
A.2.3 量子力学と粒子描像	69
A.2.4 Newton-Wigner の局在化状態と古典的形態：物質波と粒子	71
付録 B Rindler 系での場の理論の幾つかの性質	76
B.1 Rindler 系での Hamiltonian と積分核	76
B.2 $\hat{\chi}(\xi_*)$ のコヒーレント状態と古典的極限	79
謝辞	81
参考文献	82

第1章 序論

量子纏れとは、純粋状態の場合、合成系の状態ベクトルが構成要素の状態ベクトルの直積として因子化されないことをいう。すなわち、古典論では構成要素が局在化され相互に独立と思えても、量子論では状態ベクトルの因子化が出来ず、そのため構成要素の間に相関が現れる。量子纏れの研究は、Einstein、Podolsky、Rosen の量子力学的記述の不完全性の主張 [1] に対する Bohr の反論 [2] に遡る。Bohr は、状態ベクトルの空間的大局性と観測の空間的局在性の関係を明確にし、EPR の主張を批判し量子力学的記述を擁護した。

その後多くの研究がなされたが、特筆すべきは Bell の不等式 [3][4] であろう。Bell の不等式は実験的にも調べられ [5]、隠れた変数 [6] の存在を否定し、通常量子力学的記述 [7] を確立した。Bell の不等式の議論では、構成要素として2つの独立なスピンと大局的に構成された合成系の状態が使われる。その際、スピンの記述に関する座標系の選択と観測の独立性が重要な役割を果たす。その後、合成系の量子纏れの研究は、構成要素の取り方、混合状態への拡張そして纏れ方の定量化といった問題へ発展して行く [8]。

一方、粒子描像（生成、消滅演算子とそれに伴う Fock 空間）を基礎とする場の量子論において、相対論的現象でありなおかつ量子纏れ現象でもある Unruh 効果 [9][10] が注目を集めている。平坦時空であっても、Rindler 系（一定固有加速度系）のように事象の地平線が存在する座標系では時空は分割され、そのため、独立な2つの粒子描像が共存する。Unruh 効果とは、全時空で定義される Minkowski 系（慣性系）の状態ベクトルを分割された時空において定義された粒子描像で記述するときの量子纏れ現象である。

Unruh 効果の従来の研究では、位置とその運動は古典的に扱われ、量子効果は内部自由度の導入によって検出される。すなわち、Unruh-DeWitt 検出器 [11] と呼ばれる内部自由度を持つ点状検出器を用い、単位時間当たりの遷移確率を計算する [10] [12]。その結果、Unruh 効果は事象の地平線を越えた熱浴効果として記述され、温度は検出器の古典的位置によって表される。また、量子効果は、内部自由度による検出のため、Klein-Gordon 方程式の解を特徴付けるモードのうち、各領域の同一モードの相関に制限される。この結果は、領域の異なる粒子描像の同じモード間の量子纏れに古典的位置を絡ませるといったもので、不確定性関係からすると不完全な取り扱いである。その後の Unruh 効果に関する量子纏れの研究でも、一つあるいは二つのモード間の量子纏れが扱われている [13][14]。これは、合成系の状態が各モードごと因子化されるためである。

本稿の目的は、構成要素の空間的局在性と合成系の空間的大局性を直接結びつけ、量子纏れを相対論的に調べることにある。非相対論的議論とは異なり、相対論的量子論は Poincaré 群 [15] を基礎とするため状態ベクトルは運動量で特徴付けられ、そのため相対論的量子纏れの研究も運動量空間上で行われる [16]。そこで、相対論的量子論での空間的局在性に関する古くからの議論 [17][18][19] を踏まえ、Unruh 効果の空間的量子纏れの構造を調べる。この纏れについては、空間的構造を示すパラメータごと状態は因子化されない

ため、純粋状態の纏れでなく注目する自由度の混合状態の量子纏れへ議論を拡張する必要がある。

本稿では、まず Unruh 効果の起源でもある座標系の選択と基本的構成要素との関係、そしてその基本的構成要素の空間的局在性を議論し、合成系の大局的状态が注目する空間的自由度に関しては混合状態であること、そしてその状態の量子纏れの空間的構造を以下の順序で定量的に調べる。

第2章では、相対論的量子論における基本的構成要素とその局在性を調べるため、我々が Wigner の方法と呼ぶ手順を説明する [15][20][21][22][23]。空間的位置を議論するには古典論との対応が必要で、古典論、量子力学そして場の量子論を一貫して構成することが重要である。そのため、対称性変換群の表現論を使う。ある変換群のもと、その群の余随伴軌道として、古典的粒子の位相空間をまず構成する。次に、その余随伴軌道に対応する変換群のユニタリー表現を構成する [15]。これにより量子力学が構成され、量子力学における基本的観測量と基本的構成要素が決まる。この量子力学を多体系に拡張することにより、基本的粒子描像が決まる。この粒子描像がどのような古典的量によって特徴付けられるかが重要である。

本稿に必要な具体的例として、半直積群 $R \otimes R_+$ と Poincaré 群を付録 A に示し、第4章及び第5章で重要となる Newton と Wigner の局在性の議論 [17][24][25] を説明する。

第3章で、背景計量下の場の量子論の概要を説明する [26][27]。特に、二つの Rindler wedge を持つ Rindler 空間を取り上げ、この系での粒子描像を Minkowski 空間での粒子描像と比較し、Bogoliubov 変換の係数を計算する。そして、その物理的效果である熱浴効果を復習する [10][28]。ここでの計算技法や公式は第4章、第5章での議論に有用である。

第4章では、Minkowski 空間での加速度運動の世界線より構成される座標系 [29] を導入し、そこでの場の量子論 [30] へ、Newton-Wigner の議論を拡張する [31][32]。特に、Rindler 空間においては、局在性の証明を具体的に計算することによって示す。

次に、付録 A.1 で示したように、対称性変換群のユニタリー表現を基にすると、Rindler 空間の基本的粒子描像は空間的位置によって特徴付けられる。Rindler 空間における基本的構成要素はこの粒子描像であり、合成される状態は Minkowski 空間の大局的な真空である。それらに関係付ける式をここで提示する。この関係式は、スピン系での量子纏れの研究における角運動量の合成に対応する。また、付録 B では Rindler 空間の基本的粒子描像の重要な性質を示す。

第5章では、合成系の状態ベクトルとして、Minkowski 空間の全領域で定義された真空を取り、基本的構成要素としては、左右2つの Rindler wedge で定義され、空間的位置で特徴付けられる粒子描像を取る。そして、相対論的量子纏れ現象の空間的構造を調べる。

まず、空間的位置で特徴付けられる粒子描像で状態を扱おうと、モードで展開した場合のような因子化はできず、合成系の状態は単純な構造でないことを示す。そのため、注目する2つの自由度以外は跡を取り消去しても、モードで展開した場合と違い、状態は純粋状態にならない。そこで、混合状態における量子纏れの議論 [33][34][35] に従う。混合状態での量子纏れの基準を与える量としてネガティビティ [36][37] を取る。この量による量子纏れの基準は各々の Rindler wedge の位置で特徴付けられる粒子描像で定義された正準量間の相関で与えられ、この相関の大きさが消失すると各 Rindler wedge の粒子描像間の量子纏れは解けたと思える。

この相関の数値計算の結果から得られる量子纏れの特徴は、原点より左右同じ距離にある状態が強く纏れている。そして、ある距離を越すと急激に纏れの程度は弱くなる。相関の値が非常に小さくなり相対的に消失したと思える距離は質量に依存する。また、この距離は座標系の選択にも依存する。ここでの座標選択とは、左右の Rindler wedge の原点をずらした場合のことで、左右の粒子描像は独立であるが、相互の纏れの相関は、ずらさない場合に比べ遠方まで及ぶ。

次に、量子纏れを反映する正準量間の相関を場の理論から見直す。座標系の選択（参照基準系）は観測者が等速運動しているかあるいは等固有加速度運動しているかによって決まる。そこで、この座標系選択を反映させるため、観測者とともに動く検出器系を導入する。検出器系は検出器場と間接的に観測する対象場からなる。相互作用項はこれらの場を共変的に結合させる。参照基準系により、検出器場は制御されるので、相互作用項を通して対象場も間接的に制御され、左右領域の相関を調べることができる。

この検出器系を、Minkowski 空間の真空の密度演算子を通した期待値、および瞬間近似を使った遷移振幅に適用する。これにより、対象場の真空期待値すなわち Wightman 関数と粒子描像間の相関が関係づけられる。顕著な結果は左右の相関の消失したとみなせる点に現れるが、参照基準系の選択によっては独立な粒子描像の選択にならない場合があり、そのためと解釈される。

最後に、第 6 章で結果をまとめる。

本稿では、自然単位系 ($c = \hbar = 1$) 及びシグネチャー $(-+++)$ を使う。

第2章 対称性変換群に基づく古典論、量子論そして粒子描像

量子纏れを調べるには、基本的構成要素は何か、そして合成系との関係をどのようにつけるかが重要である。基本的構成要素を決めるには、基本的観測量が何かを決める必要があり、量子論的観測量の古典的対応が重要である。そして、それに従い基本的構成要素がどのような観測量によって特徴付けられるか決まる。

そこで、古典論、量子力学、そして場の量子論における粒子描像を一貫して構成できる、対称性変換群の表現論を基にする。この手順は Wigner を起源とするので、Wigner の方法と呼ぶことにする。

この章では、Wigner の方法の一般論を復習する。本稿に必要な具体的な例は付録 A で与える。また、付録 A において、本稿で最も重要な空間的局在性について、Poincaré 群を使い Newton-Wigner の議論 [17] を紹介し場の理論へ拡張する [24][25]。

2.1 変換群の余随伴軌道としての古典的位相空間

連続的な変換が作る群として Lie 群 G を取り、その余随伴軌道を構成する。群 G の元を g 、付随する Lie 環を \mathfrak{g} とする。Lie 環 \mathfrak{g} の基底の集合を $\{e_\mu\}$ とし、パラメータを t^μ とする。これにより群 G の元 g は

$$g = \exp(-t^\mu e_\mu) \quad (2.1)$$

と書ける。以後、和については Einstein の縮約を使う。基底間の括弧積は

$$[e_\mu, e_\nu] = c_{\mu\nu}^\rho e_\rho \quad (2.2)$$

であり、 $c_{\mu\nu}^\rho$ は群 G の構造定数である。

Lie 環 \mathfrak{g} は線形空間である。そこで、双対空間 \mathfrak{g}^\dagger が導入できる。双対空間 \mathfrak{g}^\dagger の基底の集合を $\{\bar{e}^\mu\}$ とし、正規直交性と完全性を

$$\langle \bar{e}^\mu | e_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}, \quad |e_\mu\rangle \langle \bar{e}^\mu| = 1 \quad (2.3)$$

と表す。内積の表記には Dirac 流を使う。Lie 環 \mathfrak{g} への Lie 群の作用は随伴写像

$$\text{Ad}(g)e_\mu \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}e_\mu g \quad (2.4)$$

を用い、 $e_\mu(g)$ と記す。一方、双対空間 \mathfrak{g}^\dagger への作用は、

$$\langle \text{Ad}^\dagger(g)\bar{e}^\mu | e_\nu \rangle = \langle \bar{e}^\mu | \text{Ad}(g^{-1})e_\nu \rangle \quad (2.5)$$

となるように、 $\text{Ad}^\dagger(g)\bar{e}^\mu$ を定義し、余随伴写像と呼び、 $\bar{e}^\mu(g)$ と書く。

双対空間内のベクトル $\bar{\lambda}_0(\in \mathfrak{g}^\dagger)$ を基点として G の元 g を作用させる。

$$\bar{\lambda}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ad}^\dagger(g)\bar{\lambda}_0 = \langle \bar{\lambda}_0 | \text{Ad}(g^{-1})e_\mu \rangle \langle \bar{e}^\mu | \quad (2.6)$$

g を連続的に変化させると、双対空間内に軌道ができ部分空間が構成される。この軌道を余随伴軌道と呼ぶ。また、一般的には基点 $\bar{\lambda}_0$ を不変にする閉部分群 H が存在する。

$$H = \{h \in G | \bar{\lambda}_0 = \text{Ad}^\dagger(h)\bar{\lambda}_0\} \quad (2.7)$$

これにより、元 g は

$$g = \sigma h, \quad g \in G, h \in H \quad (2.8)$$

と分解でき、余随伴軌道は

$$\bar{\lambda}(g) = \langle \bar{\lambda}_0 | \text{Ad}(h^{-1}\sigma^{-1})e_\mu \rangle \langle \bar{e}^\mu | = \bar{\lambda}(\sigma) \quad (2.9)$$

となる。よって、余随伴軌道は商空間 G/H と同相であることが分かる。

余随伴軌道が位相空間となることを示す。商空間 G/H 上の位置を示すパラメータ、付随する Lie 環の基底をそれぞれ z^i, e_i とする。

$$\sigma = \exp(-z^i e_i) \quad (2.10)$$

これを使い 1-形式 θ を

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} -\langle \bar{\lambda}_0 | \text{Ad}(\sigma^{-1})d\sigma^{-1}\sigma \rangle = -\langle \bar{\lambda}_0 | \sigma d\sigma^{-1} \rangle \quad (2.11)$$

と導入する。 $d\sigma, d\sigma^{-1}$ をパラメータの微分 dz^i で書くために、Feynman の公式

$$d\sigma = \int_0^1 d\alpha \exp(-\alpha z^i e_i) (-dz^i e_i) \exp(-(1-\alpha)z^i e_i) \quad (2.12)$$

を使う。これにより、

$$d\sigma = -e_\mu d_i^\mu(z) \sigma dz^i \quad (2.13)$$

$$d\sigma^{-1} = \sigma^{-1} e_\mu d_i^\mu(z) dz^i \quad (2.14)$$

と表せる。ただし、 $d_i^\mu(z)$ は

$$e_\mu d_i^\mu(z) = \int_0^1 d\alpha \exp(-\alpha z^j e_j) e_i \exp(\alpha z^j e_j) \quad (2.15)$$

である。次に、1-形式 θ を外微分することにより閉じた 2-形式 ω を作る。

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} d\theta = -\langle \bar{\lambda}_0 | d\sigma \wedge d\sigma^{-1} \rangle \quad (2.16)$$

\wedge は外積記号である。 $d\sigma, d\sigma^{-1}$ に (2.13)(2.14) を代入すると

$$\omega = \frac{1}{2} \langle \bar{\lambda}_0 | \text{Ad}(\sigma^{-1})[e_\mu, e_\nu] \rangle d_i^\mu(z) d_j^\nu(z) dz^i \wedge dz^j, \quad (2.17)$$

となり、群 G の構造定数 $c_{\mu\nu}^\rho$ を使うと

$$\omega = \frac{1}{2} c_{\mu\nu}^\rho \lambda_\rho(z) d_i^\mu(z) d_j^\nu(z) dz^i \wedge dz^j = \frac{1}{2} \omega_{ij}(z) dz^i \wedge dz^j \quad (2.18)$$

となる。ただし、 $\lambda_\rho(z) = \langle \bar{\lambda}_0 | \text{Ad}(\sigma^{-1}) e_\rho \rangle$ である。これにより、歪対称行列 $\omega_{ij}(z)$ が導入される。

次に、 $\omega_{ij}(z)$ に逆行列 $\omega^{ij}(z)$ ($\omega_{ij}(z)\omega^{jk}(z) = \delta_i^k$) が存在することを示す。そのため余随伴軌道上のある点 $\bar{\lambda}(\sigma(z))$ ($\stackrel{\text{def}}{=} \bar{\lambda}(z)$) を接点とする接平面上のベクトルを

$$\left. \frac{d}{dt} \langle \text{Ad}^\dagger(e^{-ta^\mu e_\mu}) \bar{\lambda}(z) | e_\nu \rangle \right|_{t=0} \langle \bar{e}^\nu | = \langle \bar{\lambda}(z) | a^\mu [e_\mu, e_\nu] \rangle \langle \bar{e}^\nu | = a^\mu c_{\mu\nu}^\rho \lambda_\rho(z) \langle \bar{e}^\nu | \quad (2.19)$$

と構成する。 a^μ は任意である。この接平面に双対した面上のベクトルを $b^\nu e_\nu$ とすれば、

$$a^\mu c_{\mu\nu}^\rho \lambda_\rho(z) b^\nu \neq 0 \quad (2.20)$$

である。

今、 $\sigma(z + \delta z)$ は

$$\sigma(z + \delta z) = (1 - e_\nu d_i^\nu(z) \delta z^i) \sigma(z) \quad (2.21)$$

と展開できるので、 $d_i^\nu(z) c_{\nu\mu}^\rho \lambda_\rho(z) \langle \bar{e}^\mu |$ は余随伴軌道の接平面上のベクトルである。また一方、 $|e_\nu\rangle d_i^\nu \delta z^i$ は余随伴軌道上の接平面に双対する面上のベクトルである。よって、(2.20) における a^μ 及び b^ν は各々 $d_i^\mu(z)$ 、 $d_j^\nu(z)$ と選べるので、 $c_{\mu\nu}^\rho \lambda_\rho(z) d_i^\mu(z) d_j^\nu(z)$ は正則な行列と分かる。

以上より、余随伴軌道上には $d\omega = 0$ 、 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ 、 $\omega_{ij}\omega^{jk} = \delta_{ik}$ なる行列 ω^{ij} が定義できた。そこで、余随伴軌道上の関数 $F(\lambda_\mu(z))$ 、 $G(\lambda_\mu(z))$ に対する Poisson 括弧を

$$\{F(z), G(z)\}_P \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial z^i} \frac{\partial G}{\partial z^j} \quad (2.22)$$

と導入すると、余随伴軌道の接平面上の Hamiltonian ベクトル場 X_f は

$$X_f = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial z^j} \quad (2.23)$$

である。これは、 $d_i^\nu(z) c_{\nu\mu}^\rho \lambda_\rho(z) \langle \bar{e}^\mu |$ が余随伴軌道の接平面上のベクトルであることによる。

また基底 $\{\bar{e}_\mu\}$ の変更による変数変換 $\varphi^i = \varphi^i(z)$ ($\det(\partial\varphi^i/\partial z^j) \neq 0$) により、新しい Poisson 括弧を

$$\{F, G\}_P = \Omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial \varphi^i} \frac{\partial G}{\partial \varphi^j}, \quad \Omega^{ij} = \omega^{kl} \frac{\partial \varphi^i}{\partial z^k} \frac{\partial \varphi^j}{\partial z^l} \quad (2.24)$$

と導入できる。これにより、余随伴軌道が古典的粒子の位相空間とみなせることが確認できる (Kirillov-Souriau-Kostant[21])。このような過程は粒子の力学的構造 (Lagrangian など) によらない。

2.2 基点の変更と物理的対称性

基点 $\bar{\lambda}_0$ より構成した余随伴軌道は、古典的粒子の位相空間である。これは、基点にいる観測者が観測系（粒子を記述するための座標系）を導入したことに対応する。位相空間内の位置はパラメータ $\{z\}$ で表すが、変数変換は可能である。

次に、群 G の適当な元 $g_1 (\notin H)$ で基点 $\bar{\lambda}_0$ を位相空間内の他の点 $\bar{\lambda}_1$ に移す。これを基点として同様の手法で新たな位相空間を構成する。この際、 $\bar{\lambda}_1$ を不変にする閉部分群 H_1 は

$$H_1 = \{h_1 \in G | h_1 = g_1^{-1} h g_1, h \in H\} \quad (2.25)$$

である。すなわち、 $\bar{\lambda}_1$ を g_1^{-1} で $\bar{\lambda}_0$ に移し、 h を作用し、 g_1 で元の $\bar{\lambda}_1$ に戻す変換である。これにより、 H_1 の群としての構造は H と同じで、変更された位相空間も商空間 G/H と同相であることがわかる。

これを物理的に言うと、異なった基点にいる観測者が異なった観測系を導入しても物理的内容あるいは記述は変わらない。すなわち、構成された位相空間は物理的にまったく同等で区別できない。また、基点（観測者）を移行する変換は群を作り、この変換群は群 G である。これらの変換は、観測者を移動するという意味で能動的である。また、観測者は移動しても物理的記述が変わらないという意味で、物理系はこの変換に対し対称であると言える。

古典論における、観測者の移行に伴う変換の変換行列を示しておく。位相空間内の粒子の位置を $\bar{\lambda}$ とする。これを $\bar{\lambda}_0$ における基底 $\{e_\mu\}$, $\{\bar{e}^\mu\}$ と $\bar{\lambda}_1$ の基底 $\{e'_\mu\} (= \text{Ad}(g_1^{-1})e_\mu)$, $\{\bar{e}'^\mu\} (= \text{Ad}^\dagger(g_1)\bar{e}^\mu)$ で記述する。

$$\bar{\lambda} = f_\mu \bar{e}'^\mu = g_\mu \bar{e}^\mu \quad (2.26)$$

これより、 f_μ と g_ν との関係は

$$f_\mu = g_\nu \langle \bar{e}'^\nu | e'_\mu \rangle = g_\nu \langle \bar{e}^\nu | \text{Ad}(g_1^{-1})e_\mu \rangle \quad (2.27)$$

となり、変換行列は随伴写像の行列である。古典論では随伴表現が重要な役割を果たすこともこれにより理解できる。

2.3 対称性変換群の誘導表現と量子力学

2.3.1 古典論と量子論における対称性と Wigner の定理

量子論で最も基本的で重要な仮定は状態ベクトルとその確率解釈である。すなわち、質点がどこにいるかなど物理的状況はノルムが1の状態ベクトルによって記述され、その状態ベクトルは確率的に解釈される。今、二つの異なった物理的状況 Φ, Ψ が量子論的に $|\phi\rangle$ と $|\psi\rangle$ で記述されるとき、これらの状態ベクトルの内積の2乗 $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$ は、物理的状況 Φ の中に物理的状況 Ψ を見出す確率であると解釈する。このため、位相因子 $e^{i\alpha}$ だけ異なる状態ベクトルは物理的に同じ状況を記述し、区別できない。

古典論において質点の物理的状況を示す位相空間内の位置と量子論における状態ベクトルの確率解釈を基に、古典的観測者の移動に伴う対称性を使い、量子論を構成する。その

時の最重要定理が、「Wigner の定理」である。証明は参考文献 [38] に譲るとして、物理的内容を説明する。

ある観測者 S に対して、2つの異なる物理的状況 Φ, Ψ を記述している状態ベクトルをそれぞれ $|\phi\rangle$ と $|\psi\rangle$ とする。物理的状況 Φ に物理的状況 Ψ を見出す確率は $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ である。一方、異なる観測者 S' に対し、同じ物理的状況 Φ, Ψ を記述する状態ベクトルをそれぞれ $|\phi'\rangle, |\psi'\rangle$ とする。物理的状況 Φ に Ψ を見出す確率は $|\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$ となる。そこで、これらの観測者 S, S' が量子論的に同等である条件、すなわち物理的に意味のある量は同じである条件は

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = |\langle\psi'|\phi'\rangle|^2 \quad (2.28)$$

となる。

古典論では基点（観測者）の移行は変換群 G を構成する。この群を対称性変換群と呼ぶ。対称性変換群 G の元 g で観測者を移動したのと同様な相対的移動として、物理的状況を Ψ', Φ' と変換する。これは物理系の変換で、受動的変換と呼ばれる。今、量子的物理系の変換を考える。状態ベクトル間の量子論的關係は演算子 $\hat{U}(g)$ の作用として

$$|\psi'\rangle = \hat{U}(g)|\psi\rangle, \quad |\phi'\rangle = \hat{U}(g)|\phi\rangle \quad (2.29)$$

と書く。すると、演算子 $\hat{U}(g)$ は、群 G が連続群であれば、(2.28) よりユニタリー演算子であることが証明される。これが、Wigner の定理である。

これにより、観測者の移動（変更）による物理系の変更とその対称性を基に、それが作る対称性変換群 G の随伴表現とユニタリー表現の対応を通し、古典論と量子論を統一的に見ることが出来る。

2.3.2 Hilbert 空間の構成と誘導表現

状態ベクトル空間 \mathcal{H} 上に対称性変換群 G のユニタリー表現を求めることにより量子論を構成する。群 G に付随する Lie 環 \mathfrak{g} の基底 e_μ は、量子論では \mathcal{H} に作用する演算子 \hat{e}_μ となる。演算子同士の交換関係は

$$[\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu] = ic_{\mu\nu}^\rho \hat{e}_\rho \quad (2.30)$$

である。古典的位相空間は商空間 G/H と同相であった。そこで、この空間を特徴づけるパラメータを $\{z\}$ とし、群 G の元 g を $g = \sigma(z)h$ ($h \in H, \sigma \in G/H$) と分解する。群 G の元は古典的物理的状況と対応しているので、群 G の元 g_0 を表す状態ベクトルを $|g_0\rangle$ とする。 g_0 を $g_0 = \sigma(z)h$ と分解する。古典論では閉部分群 H の表現は自明なものだったが、量子論ではユニタリー表現を使うため、 H の自明でない表現も考慮できる。

$$|g_0\rangle = |\sigma(z)\rangle \implies \sum_{s'} \rho_{ss'}(h^{-1}) |\sigma(z), s'\rangle \quad (2.31)$$

ただし、 $\rho_{ss'}(h^{-1})$ は閉部分群 H のユニタリー表現の表現行列である。そこで、自明でない表現も含め、 H の表現は求まっているものとする。この自明でない表現が量子論特有な部分であり、位相空間の自由度とは独立なので内部自由度と呼ぶことにする。

状態ベクトル $|\sigma(z), s\rangle$ に $g_1 (\in G)$ に対応する演算子 $\hat{U}(g_1)$ を作用させると

$$\hat{U}(g_1)|\sigma(z), s\rangle = \sum_{s'} \rho_{ss'}(h'^{-1}) |\sigma(z'), s'\rangle \quad (2.32)$$

となる。ただし、 g_1 は $\sigma(z) = \sigma(z')h'$ と分解する。これにより、

$$h' = \sigma(z')^{-1}g_1\sigma(z) \quad (\in H) \quad (2.33)$$

となり、 H はWignerの言うところの小群であり、Poincaré群ではWigner回転と呼ばれる部分群であることが判る。また、このような方法により構成されたユニタリー表現を誘導表現という。

もし、 $|\sigma(z), s\rangle$ がHilbert空間内のベクトルなら、内部自由度 s の量子論的粒子が位相空間上の位置 z にいる物理的状況を記述していると考えられ、古典論との対応は完璧である。しかし、 $|\sigma(z), s\rangle$ がHilbert空間内のベクトルとは通常言えない。今、群 G に、 $G \supset Q \supset H$ といった部分群の系列がある場合、群 G の元 g は $g = \sigma(x)q(p)h$ と分解でき、位相空間も2つの部分に分けることが出来る。ただし、 $\sigma(x) \in G/Q$ 、 $q(p) \in Q/H$ である。この場合も、原理的には Q のユニタリー表現から誘導表現を構成すれば良いのだが、もし Q/H にAbelian群が含まれていると事情が異なる。Abelian群は状態ベクトルの位相となり確率解釈では物理的意味を持たなくなる。そこで、状態ベクトルの位相となるAbelian群を除き、残ったパラメータで状態ベクトルを特徴付け $|\sigma(x), s\rangle$ 、物理的意味付けを行う。ただし、Abelian部分も場の量子論への移行では重要な役割を果たす。このような部分群の系列構造はHeisenberg群、Poincaré群、半直積群 $R \otimes R_+$ 、 $T^d \otimes SO(d)$ 等といった対称性変換群で見取れる[20][23][38][39]。⊗は半直積を表す。また、付録Aを参照。

対称性変換群のユニタリー表現である誘導表現を求めることにより量子論を構成する。ユニタリー表現における変換の生成子はHermite演算子であるので、生成子を量子論的観測量と解釈できる。また、この観測量は古典論での位相空間内のHamiltonianベクトル場と対応が取れ、量子論の物理的解釈も、古典的観測者にとって自然なものとなる。

以上のように対称性変換群を基に構成した状態ベクトル $|\sigma(x), s\rangle$ を使い確率振幅を導入する。物理的状況 Ψ に対応した状態ベクトルを $|\psi, s\rangle$ とする。確率振幅 $\psi_s(x)$ は

$$\langle \sigma(x), s | \psi, s \rangle = \psi_s(x) \quad (2.34)$$

であり、物理的状況 Ψ 下に、量子論固有の自由度 s を持つ量子論的粒子が $\sigma(x)$ に存在する存在確率、あるいは発見される発見確率は

$$\mathcal{P}(\sigma(x)) = |\psi_s(x)|^2 \quad (2.35)$$

となる。そのため、確率振幅は規格化可能($\psi_s(x) \in \mathcal{L}^2$)

$$\int |\psi_s(x)|^2 d\mu(\sigma(x)) = 1 \quad (< \infty) \quad (2.36)$$

でなくてはならない。 $d\mu(\sigma(x))$ は不変測度。また、群 G の生成子はHermite演算子に対応するので、量子論的観測量となり、余随伴軌道の係数である古典的量と対応させられる。

また、 $\sigma(x)$ によって構成される空間が、粒子の配位空間であるのか、あるいは運動量空間であるのかといった物理的解釈は量子論的観測量と古典的量と対応でなされる。

2.4 多体系への拡張と粒子描像

前節に従い、対称性変換群 G の誘導表現を構成することにより、1 粒子の状態ベクトル $|\sigma(x), s\rangle$ を得る。これを多体系へ拡張する。漸近状態（互いに相互作用していない状況）では、 n 体の粒子状態は 1 体の状態ベクトルの直積 \otimes である。

$$|\sigma(x_1), s_1\rangle \otimes |\sigma(x_2), s_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\sigma(x_n), s_n\rangle \quad (2.37)$$

このような状態を一般的に構成するには、1 粒子の状態ベクトルに対応した生成、消滅演算子

$$\langle \sigma(x), s | \iff \hat{a}(\sigma(x), s), \quad |\sigma(x), s\rangle \iff \hat{a}^\dagger(\sigma(x), s) \quad (2.38)$$

と粒子が存在しない状態である真空 $|0\rangle$ を導入し、Fock 空間を構成すればよい。これらに粒子数演算子を加えた枠組みを粒子描像と呼ぶ。

生成、消滅演算子の満たす代数は

$$[\hat{a}(\sigma(x), s), \hat{a}(\sigma(x'), s')]_{\pm} = 0, \quad [\hat{a}^\dagger(\sigma(x), s), \hat{a}^\dagger(\sigma(x'), s')]_{\pm} = 0 \quad (2.39)$$

$$[\hat{a}(\sigma(x), s), \hat{a}^\dagger(\sigma(x'), s')]_{\pm} = \langle \sigma(x), s | \sigma(x'), s' \rangle \quad (2.40)$$

である。−（交換関係）は Bose 粒子の場合で、+（反交換関係）は Fermi 粒子の場合である。以後 Boson に議論を限る。粒子数演算子 $\hat{n}(\sigma(x), s)$ は

$$\hat{n}(\sigma(x), s) = \hat{a}^\dagger(\sigma(x), s)\hat{a}(\sigma(x), s) \quad (2.41)$$

である。

生成、消滅演算子の群 G に関する変換性は 1 粒子状態の変換性より

$$\begin{aligned} \hat{U}(g_1)\hat{a}^\dagger(\sigma(x), s)\hat{U}^\dagger(g_1) &= \sum_{s'} \zeta(q^{-1}(p), \sigma(x))\rho_{ss'}(h'^{-1})\hat{a}^\dagger(\sigma(x'), s') \\ \hat{U}(g_1)\hat{a}(\sigma(x), s)\hat{U}^\dagger(g_1) &= \sum_{s'} \zeta^\dagger(q^{-1}(p), \sigma(x))\rho_{ss'}^*(h'^{-1})\hat{a}(\sigma(x'), s') \end{aligned} \quad (2.42)$$

である。ただし、 $G \supset Q \supset H$ という部分群の系列を想定し、その Abelian 部分の位相を $\zeta(q^{-1}(p), s)$ とした。真空 $|0\rangle$ は

$$\hat{a}(\sigma(x), s)|0\rangle = 0, \quad \hat{U}(g)|0\rangle = |0\rangle \quad (2.43)$$

である。

以上の多体系の物理的意味を考えるには古典論との対応を取る必要がある。そのために、古典的極限を考える。 \hbar は約 $1.05 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s}$ であり定数である。この定数を小さいと思える状況として、粒子数が非常に大きい極限を考える。また、古典的形態としては物質波と粒子の両方が考えられる。これらの古典的極限を調べるのに重要な状態は、生成、消滅演算子のコヒーレント状態である。

付録 A において、具体的に対称性変換群を決め、余随伴軌道、誘導表現を構成し多体系へ拡張する。また、古典的極限についても検討する。

第3章 背景計量下の場の量子論の概要

この章では、背景計量下の場の量子論 [26][27] の復習を行う。特に Rindler 空間と Minkowski 空間を取り上げ、これらの関係 [10] を示す。Rindler 空間特有の性質として、時空を左右領域に分割する地平線の存在がある。そのため領域ごと独立な粒子描像が存在し、合成系として Minkowski 空間の粒子描像が記述される。Rindler 空間の右側領域で定義された演算子に対する Minkowski 空間での真空期待値の熱効果等 [10][28] を確認しておく。

ここで示される計算技法や公式は第4章、第5章の解析に有用である。

3.1 背景計量下の場の量子論

量子場の正統的取り扱いでは、まず場の正準交換関係に矛盾しない粒子描像（生成・消滅演算子、数演算子、Fock 空間）を構成する。以下において、量子場の正統的取り扱いを背景計量下の場（実スカラー場）の量子論へ拡張する。

背景計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を持つ時空に、簡単のため、重力と最少限の相互作用をする質量 m の実スカラー量子場 $\phi(x)$ を導入する。

$$(\square - m^2)\phi(x) = 0, \quad \square \stackrel{\text{def}}{=} (-g)^{-1/2}\partial_\mu g^{\mu\nu}(-g)^{1/2}\partial_\nu \quad (3.1)$$

粒子描像を構成するため、空間的に広がった超平面 Σ を導入し、その超平面上に内積 $(\phi_1|\phi_2)$ を定義する。

$$(\phi_1|\phi_2) \stackrel{\text{def}}{=} -i \int_\Sigma \phi_1^* \overset{\leftrightarrow}{f}^\mu \phi_2 d\Sigma_\mu, \quad \overset{\leftrightarrow}{f}^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\overset{\rightarrow}{\partial}_\nu - \overset{\leftarrow}{\partial}_\nu\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

超平面 Σ に垂直な未来方向単位ベクトル n_μ を使うと $d\Sigma_\mu = n_\mu dS$ である。 dS は超平面 Σ 上の体積（面積）。 ϕ_1, ϕ_2 が (3.1) を満たしていれば、内積 (4.60) は超平面 Σ の取り方に依らない。これは

$$\Gamma_{\mu\nu}^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g} \quad (3.3)$$

と Gauss の定理

$$\int_{\partial V} J^\mu d\Sigma_\mu = \int_V J^\mu{}_{;\mu}\sqrt{-g}dV \quad (3.4)$$

により証明される。 ${}_{;\mu}$ は共変微分を表す。

内積 (3.2) の下、正規完全直交系をなす (3.1) の解 $u_i(x)$ を導入する。

$$(u_i|u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*|u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i|u_j^*) = 0. \quad (3.5)$$

量子場 $\phi(x)$ をこの完全系で展開し、粒子描像を構成する。

$$\phi(x) = \sum_i (\hat{a}_i u_i(x) + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(x)), \quad (3.6)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (3.7)$$

$$\hat{a}_i|0\rangle = 0, \quad \hat{a}_i^\dagger|0\rangle = |1_i\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}|0\rangle = |n_i\rangle, \quad \text{etc.} \quad (3.8)$$

このような粒子描像は一般的には一意的ではない。そこで、同様に正規完全直交系をなす(3.1)の別解 $\bar{u}_I(x)$ を使い、量子場 $\phi(x)$ に対し異なった粒子描像を構成する。

$$\phi(x) = \sum_I (\hat{a}_I \bar{u}_I(x) + \hat{a}_I^\dagger \bar{u}_I^*(x)), \quad \hat{a}_I|\bar{0}\rangle = 0, \quad [\hat{a}_I, \hat{a}_J^\dagger] = \delta_{IJ}, \quad \text{etc.} \quad (3.9)$$

いずれの解も正規完全直交系であるので、Bogoliubov 変換と言われる関係式

$$\bar{u}_J(x) = \sum_i (\alpha_{iJ} u_i(x) - \beta_{iJ} u_i^*(x)), \quad \hat{a}_J = \sum_i (\alpha_{iJ}^* \hat{a}_i + \beta_{iJ}^* \hat{a}_i^\dagger), \quad (3.10)$$

$$\alpha_{iJ} \stackrel{\text{def}}{=} (u_i | \bar{u}_J), \quad \beta_{iJ} \stackrel{\text{def}}{=} (u_i^* | \bar{u}_J) \quad (3.11)$$

を得る。また、内積の定義より、

$$\alpha_{iJ} = -(\bar{u}_J^* | u_i^*), \quad \beta_{iJ} = -(\bar{u}_J^* | u_i) \quad (3.12)$$

$$\alpha_{iJ}^* = (\bar{u}_J | u_i) = -(u_i^* | \bar{u}_J^*), \quad \beta_{iJ}^* = (\bar{u}_J | u_i^*) = -(u_i | \bar{u}_J^*) \quad (3.13)$$

という関係が成り立つ。完全性

$$\sum_i (|u_i\rangle \langle u_i| - |u_i^*\rangle \langle u_i^*|) = \mathbf{1} \quad (3.14)$$

より

$$\sum_k (\alpha_{kI}^* \alpha_{kJ} - \beta_{kI}^* \beta_{kJ}) = \delta_{IJ}, \quad \sum_k (\alpha_{kI}^* \beta_{kJ}^* - \beta_{kI}^* \alpha_{kJ}^*) = 0 \quad (3.15)$$

という関係が容易に示せ、また同様に、もう一つの系の完全性

$$\sum_I (|\bar{u}_I\rangle \langle \bar{u}_I| - |\bar{u}_I^*\rangle \langle \bar{u}_I^*|) = \mathbf{1} \quad (3.16)$$

より

$$\sum_I (\alpha_{iI} \alpha_{jI}^* - \beta_{iI}^* \beta_{jI}) = \delta_{ij}, \quad \sum_I (\alpha_{iI} \beta_{jI}^* - \beta_{iI}^* \alpha_{jI}) = 0 \quad (3.17)$$

を得る。(3.10)の逆変換は

$$u_j(x) = \sum_J (\alpha_{iJ} \bar{u}_J(x) + \beta_{iJ} \bar{u}_J^*(x)), \quad \hat{a}_i = \sum_J (\alpha_{iJ} \hat{a}_J - \beta_{iJ}^* \hat{a}_J^\dagger) \quad (3.18)$$

である。ここで、 $u_i^*(\bar{u}_I^*)$ のノルムは負で、生成演算子と消滅演算子の識別は展開する関数のノルムに依っている。また、完全性の表記(3.14)及び(3.16)における $\mathbf{1}$ は内積の定義に従って

$$\mathbf{1} \cdot g(x) \stackrel{\text{def}}{=} -i \int_{\Sigma} \mathcal{D}(x, y) \overleftrightarrow{f}_y^\mu g(y) d\Sigma_\mu = g(x) \quad (3.19)$$

となる $\mathcal{D}(x, y)$ を意味する。

2つの Fock 空間の真空の関係は、

$$\hat{a}_i|0\rangle = \sum_J (\alpha_{iJ}\hat{a}_J - \beta_{iJ}^*\hat{a}_J^\dagger)|0\rangle = 0 \quad (3.20)$$

を解くことにより得られる。実際には、(3.20) を変形し

$$(\hat{a}_I - \sum_J V_{IJ}\hat{a}_J^\dagger)|0\rangle = 0, \quad V_{IJ} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k (\alpha^{-1})_{Ik}\beta_{kJ}^* \quad (3.21)$$

を解く。(3.17) の右側の式より、 V_{IJ} は対称行列

$$V_{IJ} = V_{JI} \quad (3.22)$$

であることが証明できるので、

$$|0\rangle = F(\hat{a}_J^\dagger)|\bar{0}\rangle \quad (3.23)$$

と置くことにより、(3.21) は

$$\hat{a}_I F(\hat{a}_J^\dagger)|\bar{0}\rangle = [\hat{a}_I, F(\hat{a}_J^\dagger)]|\bar{0}\rangle = \frac{\partial F(\hat{a}_J^\dagger)}{\partial \hat{a}_I^\dagger}|\bar{0}\rangle = \sum_J V_{IJ}\hat{a}_J^\dagger F(\hat{a}_J^\dagger)|\bar{0}\rangle \quad (3.24)$$

となり、 $F(\hat{a}_J^\dagger)$ は

$$|0\rangle = N \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{IJ} \hat{a}_I^\dagger V_{IJ} \hat{a}_J^\dagger\right)|\bar{0}\rangle \quad (3.25)$$

と解ける。 N は規格化定数。

次に、対称性を持つ時空を想定する。その空間での Killing ベクトル ξ^μ を決める Killing 方程式

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \quad (3.26)$$

は

$$g_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha + g_{\mu\alpha}\xi_{,\nu}^\alpha = 0 \quad (3.27)$$

とも書ける。 $_{,\nu}$ は通常の偏微分を表す。適当な座標系 \tilde{x}^ν を取り、 i 番目の Killing ベクトル ξ_i^μ が $\tilde{\xi}_i^\mu = \delta_i^\mu$ となるようにすれば、その座標系においての計量 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ は \tilde{x}^i に依存しない。時空が対称であるなら、その方向に関する保存量が存在する。

$$P_i(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Sigma \xi_{i\mu} T^{\mu\nu} d\Sigma_\nu \quad (3.28)$$

$T^{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルで

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (3.29)$$

を満たす。

時間的 Killing ベクトル ξ_0^μ の存在を仮定する。時間方向への対称性が仮定されるので、ハミルトニアン H はエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を使い

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Sigma \xi_{0\mu} T^{\mu\nu} d\Sigma_\nu \quad (3.30)$$

と与えられる。具体的に、エネルギー・運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial^\rho \phi \partial_\rho \phi + m^2 \phi^2 \right) \quad (3.31)$$

である。

(3.1) の解として、

$$\xi_0^\mu \partial_\mu u_i(x) = -i\omega_i u_i(x) \quad (3.32)$$

となる場合に注目する。 $\xi_0^\mu \partial_\nu = \partial / \partial \tilde{x}^0$ となる適当な座標系 $(\tilde{x}^0, \tilde{\mathbf{x}})$ を取る。これにより

$$u_i(\tilde{x}) = e^{-i\omega_i \tilde{x}^0} U_i(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.33)$$

と分離できる。しかし、一般には $\omega_i > 0$ とは限らない。注意すべき点は、粒子描像の構成はノルムの符号に従い行うことである。

3.2 Rindler 系の物理的性質

本質的な 2 次元部分に注目する。Rindler 空間及び Minkowski 空間にそれぞれ座標系を導入する。これらの座標系をそれぞれ Rindler 系及び Minkowski 系と呼ぶ。Minkowski 系は通常の直交座標系 (x^0, x^1) である。Rindler 系 (η, ξ) ($-\infty < \eta, \xi < \infty$) と Minkowski 系との関係は

$$x^0 = \xi \sinh \eta, \quad x^1 = \xi \cosh \eta \quad (3.34)$$

とする。Rindler 空間は 2 つの部分 (右、左 Rindler wedge) からなる。

$$\xi > 0: \quad R_+ = \{(x^0, x^1) | x^1 > |x^0|\}, \quad (3.35)$$

$$\xi < 0: \quad R_- = \{(x^0, x^1) | x^1 < -|x^0|\}. \quad (3.36)$$

R_+ 及び R_- の境界は事象の地平線と呼ばれる。 $dx^0 = d\xi \sinh \eta + d\eta \xi \cosh \eta$ と $dx^1 = d\xi \cosh \eta + d\eta \xi \sinh \eta$ より、Rindler 系での計量は

$$ds^2 = -\xi^2 d\eta^2 + d\xi^2, \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\xi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\xi^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

である。

この座標の物理的意味を見るために、Rindler 系で静止した点 A を

$$\xi = a^{-1}, \quad d\xi = 0 \quad (3.38)$$

と選ぶ。ただし、 $a > 0$ 。この点の固有時間 τ は

$$d\tau^2 = \frac{1}{a^2} d\eta^2 \quad (3.39)$$

であり、Minkowski 系からみた点 A の運動は

$$x^0(\tau) = a^{-1} \sinh a\tau, \quad x^1(\tau) = a^{-1} \cosh a\tau \quad (3.40)$$

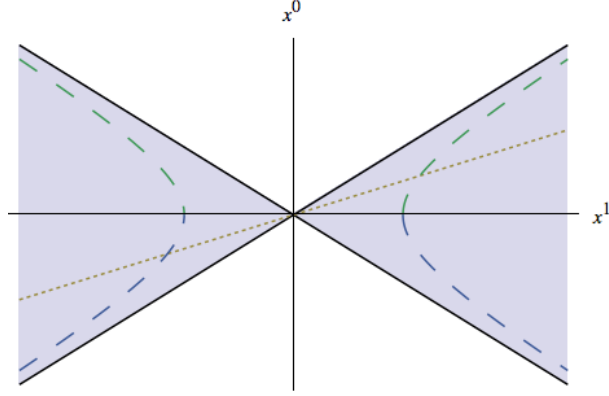


図 3.1. 薄紫部は Rindler 空間 (右、左 Rindler wedge)。短い破線は η が定数の場合、長い破線は ξ が定数の場合を表す。

となる。点 A の Minkowski 系での速度 v 、加速度 \dot{v} は

$$v = \tanh a\tau, \quad \dot{v} = \frac{a}{\cosh^3 a\tau} = a(1 - v^2)^{3/2} \quad (3.41)$$

である。これを瞬間静止系に Lorentz 変換 ($\dot{v}/(1 - v^2)^{3/2}$) すると、固有加速度は a となる。すなわち Rindler 系で ξ 一定の線は、固有加速度一定の加速度運動を表し、その運動の固有時間は η である。図 3.1 を参照。

3.3 Rindler 系と Minkowski 系での粒子描像の関係

Rindler 系を (η, ξ, y, z) 、Minkowski 系を (t, x, y, z) と拡張する。 $\xi^2 = x^2 - t^2, \eta = \tanh^{-1}(t/x)$ である。この座標系の計量は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\xi^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = -\xi^2 \quad (3.42)$$

である。 $\xi = \sqrt{x^2 - t^2}$, $(x > |t|)$ を取るときは領域 $R_+ = \{(t, x) | x > |t|\}$ で、 $\xi = -\sqrt{x^2 - t^2}$, $(-x > |t|)$ を取るときは、領域 $R_- = \{(t, x) | -x > |t|\}$ である。

Klein-Gordon 方程式は

$$\left(-\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 \right) \phi(x) = 0 \quad (3.43)$$

と書け、内積 (4.60) の $\overleftrightarrow{f}^\mu|_{\mu=0}$ は

$$\overleftrightarrow{f}^0 = -\frac{1}{\xi} \overrightarrow{\partial} + \overleftarrow{\partial} \frac{1}{\xi} \quad (3.44)$$

である。

領域 R_+ ($\xi > 0$) における (3.43) の正のノルム解 $\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\eta, \xi, y, z)$ を

$$\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(x) = h_{R(\rho, k_y, k_z)}(\xi) e^{-i\rho\eta} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \quad (3.45)$$

として求める。 $h_{R(\rho, k_y, k_z)}(\xi)$ の満たす式は、(3.43) より

$$\left(\frac{1}{\xi^2} \rho^2 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - Q^2 \right) h_{R(\rho)}(\xi) = 0 \quad (3.46)$$

となる。ただし、 $Q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2 + m^2}$ である。今、 $i\rho = \nu$ 、 $Q\xi = \zeta$ とおくと変形された Bessel の微分方程式 [40]

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} - \left(1 + \frac{\nu^2}{\zeta^2}\right) \right) \bar{h}_{R(\nu)}(\zeta) \quad (3.47)$$

を得る。そこで、領域 R_+ ($\xi > 0$) における (3.43) の正のノルム解は

$$\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(x) = \frac{(\sinh \pi\rho)^{1/2}}{2\pi^2} e^{-i\rho\eta} e^{ik_y y} e^{ik_z z} K_{i\rho}(Q\xi) \quad (3.48)$$

であり、領域 R_- ($\xi < 0$) での正のノルムの解は

$$\bar{u}_{L(\rho, k_y, k_z)}(x) = \frac{(\sinh \pi\rho)^{1/2}}{2\pi^2} e^{i\rho\eta} e^{ik_y y} e^{ik_z z} K_{i\rho}(-Q\xi) \quad (3.49)$$

である。 $K_{i\rho}(Q\xi)$ は変形第 2 種 Bessel 関数、 $\rho > 0$ である。正のノルム解なので規格化は

$$(\bar{u}_{R(\rho', k'_y, k'_z)} | \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}) = \delta(\rho' - \rho) \delta(k'_y - k_y) \delta(k'_z - k_z) \quad (3.50)$$

と取るが、これを確認するには、後で述べる Bogoliubov 係数の計算で用いる技法と同じ技法を使う。 $\bar{u}_{L(\rho, k_y, k_z)}$ も同様に規格化する。また、 \bar{u}_R, \bar{u}_L は η に関し正振動解でもある。 η と固有時間 τ との関係 (3.39) より、 $\rho d\eta = a\rho d\tau$ となるので、 $a\rho$ は固有エネルギーとも呼ばれるべき量である。この量の定義は局在的である。

量子場 $\phi(x)$ を \bar{u}_R, \bar{u}_L で展開すること

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \int d\rho dk_y dk_z (\hat{a}_R(\rho, k_y, k_z) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(x) + \hat{a}_R^\dagger(\rho, k_y, k_z) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(x) \\ & + \hat{a}_L(\rho, k_y, k_z) \bar{u}_{L(\rho, k_y, k_z)}(x) + \hat{a}_L^\dagger(\rho, k_y, k_z) \bar{u}_{L(\rho, k_y, k_z)}^*(x)) \end{aligned} \quad (3.51)$$

により粒子描像を導入する。Rindler 系での真空 $|\bar{0}\rangle$ は

$$\hat{a}_R(\rho, k_y, k_z) |\bar{0}\rangle = \hat{a}_L(\rho, k_y, k_z) |\bar{0}\rangle = 0 \quad (3.52)$$

である。

次に Bogoliubov 係数 $\alpha_{\mathbf{k}\varrho}^R$ を具体的に求める。ここで、 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 、 $\varrho = (\rho, k'_y, k'_z)$ 、 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ と略記する。Minkowski 系の正ノルム解は

$$u_{\mathbf{k}}(x) = \frac{e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}, \quad \omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (3.53)$$

であり、Bogoliubov 係数 $\alpha_{\mathbf{k}\ell}^R$ の計算では、内積は超平面の取り方によらないことを利用し、光円錐近傍の超平面を取る。そこで、変数変換

$$\eta = \frac{w+v}{2}, \quad \xi = \alpha \exp\left(\frac{v-w}{2}\right) \quad \left(t = \frac{\alpha}{2}(e^v - e^{-w}), \quad x = \frac{\alpha}{2}(e^v + e^{-w})\right) \quad (3.54)$$

を行う。 α は正の数。この変換により計量は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha^2}{2}e^{v-w} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha^2}{2}e^{v-w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\alpha^2}e^{-(v-w)} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\alpha^2}e^{-(v-w)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$g = -\frac{\alpha^4}{4}e^{2(v-w)} \quad (3.56)$$

となる。(3.55) から内積は

$$(f|g) = i \int dv dy dz f^* \overleftrightarrow{\partial}_v g \quad (3.57)$$

となる。光円錐近傍 $t \sim x$ 、つまり $w \rightarrow \infty$ では、変形第 2 種 Bessel 関数の $\xi \sim 0$ での近似的振る舞い [40]

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} K_{i\rho}(\xi) \sim \frac{i\pi}{2 \sinh(\pi\rho)} \left(\frac{(\xi/2)^{i\rho}}{\Gamma(1+i\rho)} - \frac{(\xi/2)^{-i\rho}}{\Gamma(1-i\rho)} \right) \quad (3.58)$$

より、Bogoliubov 係数 $\alpha_{\mathbf{k}\ell}^R$ は

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}\ell}^R &= i \int dv \int dy dz \lim_{w \rightarrow \infty} u_{\mathbf{k}}^* \overleftrightarrow{\partial}_v \bar{u}_R \\ &= \frac{-\pi \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \int dv \\ &\quad \times \left\{ \exp i((\omega_k - k_x) \frac{\alpha e^v}{2}) \overleftrightarrow{\partial}_v (A e^{-i\rho w} - A^* e^{-i\rho v}) \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

となる。A は

$$A = \frac{(\alpha Q/2)^{i\rho}}{\Gamma(1+i\rho)}$$

である。Riemann-Lebesgue 積分

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\rho e^{\pm i\rho w} f(\rho) = 0 \quad (3.60)$$

を使えば、(3.59) の $e^{i\rho w}$ 項が落とせて

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}\ell}^R &= \frac{-\pi \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \int dv \\ &\quad \times i \exp \left\{ i(\omega_k - k_x) \frac{\alpha e^v}{2} \right\} A^* e^{-i\rho v} \left\{ \rho + (\omega_k - k_x) \frac{\alpha e^v}{2} \right\} \end{aligned}$$

となる。\$v\$ 積分を実行するため、\$(\omega_k - k_x)\alpha e^v/2 = z\$ と変数変換する。

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{k}\rho}^R &= -iA^* \frac{\pi\delta(k_y - k'_y)\delta(k_z - k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \left(\frac{2}{(\omega_k - k_x)\alpha} \right)^{-i\rho} \int_0^\infty dz \\ &\quad \times e^{iz} z^{-i\rho} \left(\frac{\rho}{z} + 1 \right)\end{aligned}$$

複素平面上の上半面に時計回りに \$\pi/2\$ の積分路を選べば

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{k}\rho}^R &= -iA^* \frac{\pi\delta(k_y - k'_y)\delta(k_z - k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \left(\frac{2}{(\omega_k - k_x)\alpha} \right)^{-i\rho} \int_0^\infty i dy \\ &\quad \times e^{-y} (iy)^{-i\rho} \left(\frac{\rho}{iy} + 1 \right) \\ &= -i \frac{(\alpha Q/2)^{-i\rho}}{\Gamma(1 - i\rho)} \frac{\pi\delta(k_y - k'_y)\delta(k_z - k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \left(\frac{2}{(\omega_k - k_x)\alpha} \right)^{-i\rho} \\ &\quad \times 2\rho e^{\pi\rho/2} \Gamma(-i\rho) \\ &= \frac{\delta(k_y - k'_y)\delta(k_z - k'_z)}{\sqrt{2\pi\omega_k(1 - e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k - k_x}{Q} \right)^{i\rho}\end{aligned}\tag{3.61}$$

となる。Bogoliubov 係数 \$\beta_{\mathbf{k}\rho}^R\$ も同様に計算し、

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbf{k}\rho}^R &= i \int dv \int dydz \lim_{w \rightarrow \infty} u_{\mathbf{k}} \overleftrightarrow{\partial}_v \bar{u}_R \\ &= \frac{\pi\delta(k_y + k'_y)\delta(k_z + k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \int dv \\ &\quad \times \left\{ \exp\left((-i(\omega_k - k_x) \frac{\alpha e^v}{2}) \right) \overleftrightarrow{\partial}_v (Ae^{-i\rho v} - A^*e^{-i\rho v}) \right\}\end{aligned}$$

Riemann-Lebesgue 積分を使い、\$e^{i\rho v}\$ の項を落とし

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbf{k}\rho}^R &= -\frac{\pi\delta(k_y + k'_y)\delta(k_z + k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \int dv \\ &\quad \times i \exp\left\{ (-i)(\omega_k - k_x) \frac{\alpha e^v}{2} \right\} A^* e^{-i\rho v} \left\{ \rho - (\omega_k - k_x) \frac{\alpha e^v}{2} \right\}\end{aligned}$$

となる。\$v\$ 積分を実行するため、\$(\omega_k - k_x)\alpha e^v/2 = z\$ と変数を変換し

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbf{k}\rho}^R &= -iA^* \frac{\pi\delta(k_y + k'_y)\delta(k_z + k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \left(\frac{2}{(\omega_k - k_x)\alpha} \right)^{-i\rho} \int_0^\infty dz \\ &\quad \times e^{-iz} z^{-i\rho} \left(\frac{\rho}{z} - 1 \right),\end{aligned}$$

複素平面上の下半面に反時計回りに $\pi/2$ の積分路を選べば

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathbf{k}\varrho}^R &= -iA^* \frac{\pi\delta(k_y + k'_y)\delta(k_z + k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \left(\frac{2}{(\omega_k - k_x)\alpha} \right)^{-i\rho} \int_0^\infty i dy \\
&\quad \times e^{-y(-iy)^{-i\rho}} \left(\frac{\rho}{iy} + 1 \right) \\
&= -i \frac{(\alpha Q/2)^{-i\rho}}{\Gamma(1-i\rho)} \frac{\pi\delta(k_y + k'_y)\delta(k_z + k'_z)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k \sinh \pi\rho}} \left(\frac{2}{(\omega_k - k_x)\alpha} \right)^{-i\rho} \\
&\quad \times 2\rho e^{-\pi\rho/2} \Gamma(-i\rho) \\
&= \frac{\delta(k_y + k'_y)\delta(k_z + k'_z)}{\sqrt{2\pi\omega(e^{-2\pi\rho} - 1)}} \left(\frac{\omega_k - k_x}{Q} \right)^{i\rho} \\
&= e^{-\pi\rho} \alpha_{\mathbf{k}\varrho'}^R
\end{aligned} \tag{3.62}$$

となる。 $\varrho' = (\rho, -k'_y, -k'_z)$ である。 R_- の領域についても同様に計算でき、結果を記せば

$$\alpha_{\mathbf{k}\varrho}^L = \frac{\delta(k_y - k'_y)\delta(k_z - k'_z)}{\sqrt{2\pi\omega_k(1 - e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k + k_x}{Q} \right)^{i\rho} \tag{3.63}$$

$$\beta_{\mathbf{k}\varrho}^L = e^{-\pi\rho} \alpha_{\mathbf{k}\varrho'}^L \tag{3.64}$$

である。

結果として、 $\beta \neq 0$ であるから、Rindler 系の真空は Minkowski 系の真空と異なる。そこで第 3.1 節で述べた方法で、Rindler 系の真空と Minkowski 系の真空との関係を求める。 y, z 方向は Q の表記を除き結果を変えないので、2次元 (t, x) に注目する。

Bogoliubov 変換

$$\hat{a}(k) = \int d\rho (\alpha_{k\rho}^R \hat{a}^R(\rho) - \beta_{k\rho}^{R*} \hat{a}^{R\dagger}(\rho) + \alpha_{k\rho}^L \hat{a}^L(\rho) - \beta_{k\rho}^{L*} \hat{a}^{L\dagger}(\rho)) \tag{3.65}$$

と、 $\hat{a}(k)|0\rangle = 0$ より、

$$\alpha_{k\rho}^R \hat{a}^R(\rho)|0\rangle = \beta_{k\rho}^{L*} \hat{a}^{L\dagger}(\rho)|0\rangle \tag{3.66}$$

$$\alpha_{k\rho}^L \hat{a}^L(\rho)|0\rangle = \beta_{k\rho}^{R*} \hat{a}^{R\dagger}(\rho)|0\rangle \tag{3.67}$$

が成立する。まず、(3.66) を用い、 $|0\rangle = F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))|\bar{0}\rangle$ として

$$\alpha_{k\rho}^R \hat{a}^R(\rho) F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))|\bar{0}\rangle = \beta_{k\rho}^{L*} \hat{a}^{L\dagger}(\rho) F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))|\bar{0}\rangle \tag{3.68}$$

を解く。 $(\alpha^{-1})_{\nu k}^R$ を

$$\int dk (\alpha^{-1})_{\nu k}^R \alpha_{k\rho}^R = \delta(\nu - \rho) \tag{3.69}$$

と導入する。(3.68) は

$$\begin{aligned}
\hat{a}^R(\nu) F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))|\bar{0}\rangle &= \int d\rho dk (\alpha^{-1})_{\nu k}^R \beta_{k\rho}^{L*} \hat{a}^{L\dagger}(\rho) F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))|\bar{0}\rangle \\
&= \int d\rho V_{\nu\rho}^{RL} \hat{a}^{L\dagger}(\rho) F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))|\bar{0}\rangle, \quad V_{\nu\rho}^{RL} = \int dk (\alpha^{-1})_{\nu k}^R \beta_{k\rho}^{L*}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

となり、左辺は

$$(\text{左辺}) = [\hat{a}^R(\nu), F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))]|\bar{0}\rangle = \frac{\partial F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))}{\partial \hat{a}^{R\dagger}(\nu)}|\bar{0}\rangle \quad (3.71)$$

となる。これより、 $F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho))}{\partial \hat{a}(\nu)^{R\dagger}} &= \int d\rho V_{\nu\rho}^{RL} \hat{a}(\rho)^{L\dagger} F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho)) \\ F(\hat{a}^{L\dagger}(\rho), \hat{a}^{R\dagger}(\rho)) &= C \exp\left(\int d\rho d\nu \hat{a}(\nu)^{R\dagger} V_{\nu\rho}^{RL} \hat{a}^{L\dagger}(\rho)\right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

となる。具体的に $V_{\nu\rho}^{RL}$ を計算すると、 $\alpha_{k\rho}^R$ は

$$\alpha_{k\rho}^R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_k(1-e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{i\rho} \quad (3.73)$$

であるから (3.69) より、 $(\alpha^{-1})_{\nu k}^R$ は

$$(\alpha^{-1})_{\nu k}^R = \sqrt{\frac{1-e^{-2\pi\nu}}{2\pi\omega_k}} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{-i\nu} \quad (3.74)$$

と求まる。実際、 $k = m \sinh \theta$ と変数変換することで確かめる事が出来る。 $\beta_{k\rho}^{L*}$ は

$$\beta_{k\rho}^{L*} = \frac{e^{-\pi\rho}}{\sqrt{2\pi\omega_k(1-e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{i\rho} \quad (3.75)$$

と求まるから、 $V_{\nu\rho}^{RL}$ は

$$\begin{aligned} V_{\nu\rho}^{RL} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha^{-1})_{\nu k}^R \beta_{k\rho}^{L*} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-\pi\rho}}{2\pi\omega_k} \sqrt{\frac{1-e^{-2\pi\nu}}{1-e^{-2\pi\rho}}} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{-i\nu} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{i\rho} \end{aligned}$$

ここで、変数変換 $k = m \sinh \theta$ を行うことにより

$$\begin{aligned} V_{\nu\rho}^{RL} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{-\pi\rho} \sqrt{\frac{1-e^{-2\pi\nu}}{1-e^{-2\pi\rho}}} e^{i(\nu-\rho)\theta} \\ &= e^{-\pi\rho} \delta(\nu - \rho) \end{aligned} \quad (3.76)$$

となる。(3.67) の場合も同様に計算ができる。 $V_{\nu\rho}^{LR}$ を

$$V_{\nu\rho}^{LR} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha^{-1})_{\nu k}^L \beta_{k\rho}^{R*} \quad (3.77)$$

と定義すると

$$\alpha_{k\rho}^L = \alpha_{k\rho}^{R*} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_k(1-e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{-i\rho} \quad (3.78)$$

$$(\alpha^{-1})_{\nu k}^L = \sqrt{\frac{1-e^{-2\pi\nu}}{2\pi\omega_k}} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{i\nu} \quad (3.79)$$

$$\beta_{\nu\rho}^{R*} = e^{-\pi\rho} \alpha_{k\rho}^{R*} = \frac{e^{-\pi\rho}}{\sqrt{2\pi\omega_k(1-e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{-i\rho} \quad (3.80)$$

と書けることから

$$V_{\nu\rho}^{LR} = e^{-\pi\rho}\delta(\nu - \rho) \quad (3.81)$$

と求まる。(3.76),(3.81)の結果から

$$\hat{a}^R(\rho)|0\rangle = e^{-\pi\rho}\hat{a}^{L\dagger}(\rho)|0\rangle \quad (3.82)$$

$$\hat{a}^L(\rho)|0\rangle = e^{-\pi\rho}\hat{a}^{R\dagger}(\rho)|0\rangle \quad (3.83)$$

が導かれる。(3.72)の規格化定数 C を求めるにあたり、エネルギー ρ を固定し

$$|0_\rho\rangle = C_\rho \exp(e^{-\pi\rho}\hat{a}^{L\dagger}(\rho)\hat{a}^{R\dagger}(\rho))|\bar{0}\rangle, \quad (3.84)$$

$\langle 0_\rho|0_\rho\rangle = 1$ を課すことにより、

$$C_\rho = \sqrt{1 - e^{-2\pi\rho}} \quad (3.85)$$

と決まる。そこで、

$$|0\rangle = \prod_{\rho} |0_\rho\rangle \quad (3.86)$$

となるので、Rindler 系の真空と Minkowski 系の真空との関係は

$$|0\rangle = \prod_{\rho} \sqrt{1 - e^{-2\pi\rho}} \exp(e^{-\pi\rho}\hat{a}^{L\dagger}(\rho)\hat{a}^{R\dagger}(\rho))|\bar{0}\rangle \quad (3.87)$$

となる。

以上より、4次元での Minkowski 系の真空と Rindler 系の真空の関係は形式的に

$$|0\rangle = N \exp \left\{ \int d\rho dk_y dk_z e^{-\pi\rho} \hat{a}_R^\dagger(\rho, k_y, k_z) \hat{a}_L^\dagger(\rho, k_y, k_z) \right\} |\bar{0}\rangle \quad (3.88)$$

と書ける。 N は形式的な規格化定数。 $a\rho$ が固有時間に対するエネルギーであることを考慮し、(3.88)を用いると、Rindler 系の右側領域で定義した演算子 \hat{O}^R の Minkowski 系での真空 $|0\rangle$ の期待値は

$$\langle 0|\hat{O}^R|0\rangle = \frac{\text{Tr}(\exp(-a\hat{H}^R/T)\hat{O}^R)}{\text{Tr}(\exp(-a\hat{H}^R/T))} \quad (3.89)$$

$$T = \frac{a}{2\pi}, \quad a = \frac{1}{\xi} \quad (3.90)$$

と表される。 \hat{H}^R は η に対する Hamiltonian である。(3.90)から、 T を温度と定義すると、空間全体に広がる Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ では、Rindler 系の右側領域で定義された \hat{O}^R にとって、左側領域は熱浴として振る舞う。また、この温度は原点から遠く離れば小さくなることから、原点近傍特有の現象とも言える。温度に関しより物理的な説明は Unruh-DeWitt 検出器が使われるが、この検出器が古典的な点状であるのは、固有時間に関するエネルギーを検出するためである。

以上の議論は全空間に広がった運動量に焦点をあてたものである。次章に、空間的局在性を持つ粒子描像を構成し、位置という観点から Rindler 系の性質を調べる準備をする。

第4章 背景計量下の場の量子論における局在性と基本的構成要素

Rindler 座標系を含む、Minkowski 空間ないの加速度運動を使い構成する座標系 [29] を加速度系と呼ぶことにする。加速度系における場の量子論 [30] の空間的局在性を、付録 A.2.4 で説明した Newton-Wigner の議論を拡張し調べる [31][32]。特に、Rindler 系においては直接の計算により空間的局在性を確認する。

Rindler 空間には時間を含む都合の良い対称性はないし、また Heisenberg 群に対応した性質もない。そこで空間が半直線であることより、付録 A.1 で対称性変換群 $R \otimes R_+$ の表現論を基に構成した基本的粒子描像を使う。この粒子描像は空間的位置により特徴付けられている。Minkowski 空間における基本的粒子描像との関係を示す式をこの章で提示する。

4.1 加速度系での場の量子論における局在性

Poincaré 群を基にした Newton-Wigner の空間的局在性の議論は、付録 A.2.4 で詳細に議論をするが、3つの条件

1. 時間及空間の原点 ($o: t = 0, x^i = 0$) に局在化された状態 $|o\rangle$ は、空間回転、時間反転、空間反転に対し不変である。
2. 原点 o に局在化された状態を空間移動して出来た状態はもとの状態と直交する。(局在性)
3. Lorentz 群の生成子は局在状態に作用出来る。(正則条件)

に基づいている。局在化された状態の空間移動の生成子として運動量演算子が使えるので、力学的構造によらない部分は Heisenberg 群による位置と運動量の関係を満たす。これにより、運動量で特徴付けられる粒子描像 ($\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p)$) 同様、位置で特徴付けられる粒子描像 ($\hat{\chi}(x), \hat{\chi}^\dagger(x)$) が導入でき、同時刻交換関係は

$$\begin{aligned} [\hat{\chi}(x), \hat{\chi}^\dagger(x')] &= \delta^d(x - x') \\ [\hat{\chi}(x), \hat{\chi}(x')] &= [\hat{\chi}^\dagger(x), \hat{\chi}^\dagger(x')] = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

である。粒子描像 ($\hat{a}(p), \hat{a}^\dagger(p)$) との関係は

$$\hat{\chi}(x) = \int \frac{d^d p \sqrt{2p^0}}{\sqrt{(2\pi)^d}} \hat{a}(p) \frac{e^{ix_i p^i}}{\sqrt{2p^0}}, \quad \hat{\chi}^\dagger(x) = \int \frac{d^d p \sqrt{2p^0}}{\sqrt{(2\pi)^d}} \hat{a}^\dagger(p) \frac{e^{-ix_i p^i}}{\sqrt{2p^0}} \quad (4.2)$$

である。 d は空間次元。

Rindler 系をはじめこの章で扱う系は、Heisenberg 群との対応を取ることはできない。そこで、粒子描像 ($\hat{\chi}(x), \hat{\chi}^\dagger(x)$) を直接構成する。

量子論で重要な観測量は遷移確率である。これを導入するには時間発展のユニタリ演算子が必要で、時間的 Killing ベクトル ξ_0^μ の存在が要求される。そこで、Minkowski 空間内での時間的世界線の接線と Killing ベクトルの方向を一致させ、時間的 Killing ベクトルを分類する。この Killing ベクトルに直交する空間的超平面 Σ を取り座標系を構成する。このように構成された座標系は Minkowski 系及び Rindler 系を含め 6 種類に分類される [29]。Minkowski 空間内の世界線すなわち等速運動も含めた意味で加速運動によって分類、構成されるので、これらの座標系を加速度系 ($\tilde{x} = (\tilde{x}^0, \tilde{\mathbf{x}})$) と呼ぶ。加速度系では

$$\sqrt{-g}g^{0\nu}\tilde{\partial}_\nu u_i(\tilde{x}) = i\frac{E_i}{\lambda(\tilde{x})}u_i(\tilde{x}), \quad \lambda(\tilde{x}) > 0 \quad (4.3)$$

が成立する [30]。 $\lambda(\tilde{x})$ は座標系ごとに決まる \tilde{x} の関数で正定値である。

位置で特徴付けられる粒子描像の類推と展開する関数の内積より

$$\hat{\chi}(\tilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \sqrt{2E_i}\hat{a}_i u_i(\tilde{x}), \quad \hat{\chi}^\dagger(\tilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \sqrt{2E_i}\hat{a}_i^\dagger u_i^*(\tilde{x}) \quad (4.4)$$

という演算子を導入する。これらの場の演算子の同時刻交換関係は

$$[\hat{\chi}(\tilde{x}), \hat{\chi}^\dagger(\tilde{y})] |_{\tilde{x}^0=\tilde{y}^0=0} = \sum_i 2E_i u_i(\tilde{\mathbf{x}}) u_i^*(\tilde{\mathbf{y}}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}), \quad (4.5)$$

$$[\hat{\chi}(\tilde{x}), \hat{\chi}(\tilde{y})] = [\hat{\chi}^\dagger(\tilde{x}), \hat{\chi}^\dagger(\tilde{y})] = 0 \quad (4.6)$$

となる。 $\tilde{x}^0 = 0$ での空間的超平面 (Σ) 上の一体状態は

$$|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}})|0\rangle, \quad \langle\tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.7)$$

となる。ここで導入した $\hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}})$ の性質を調べ、局在性について確認する。

局在性を確認するには、(4.5) の $\hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ が

$$\int_\Sigma \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) g(\tilde{\mathbf{y}}) \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{y}})} d\Sigma_0 = g(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.8)$$

を満たすことを示せばよい。

そこで解 $u_i(\tilde{x}), u_i^*(\tilde{x})$ が完全系であることを踏まえ、 $g(\tilde{x}) = \sum_j c_j u_j(\tilde{x}) + \sum_j d_j u_j^*(\tilde{x})$ とし、試験関数 $g(\tilde{x})$ を $\tilde{x}^0 = 0$ の Σ 上で与える。そして、局在性を表す (4.8) が Klein-Gordon 方程式の解 $u_i(\tilde{x})$ の性質に帰着できることを確認する。この確認過程は 2 つに分け行う。

(a) $g(\tilde{y}) = \sum_j c_j u_j(\tilde{y})$

解 $u_i(\tilde{x}), u_i^*(\tilde{x})$ の完全性は

$$-i \sum_i \int_\Sigma (u_i(\tilde{x}) u_i^*(\tilde{y}) - u_i^*(\tilde{x}) u_i(\tilde{y})) f_{\tilde{y}}^{\mu\leftrightarrow} g(\tilde{y}) d\Sigma_\mu = g(\tilde{x}) \quad (4.9)$$

である。 Σ 上の正規直交性は

$$(u_i|u_j) = \int_\Sigma u_i^*(\tilde{\mathbf{x}})(E_i + E_j)u_j(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{x}})} d\Sigma_0 = \delta_{ij} \quad (4.10)$$

と書けるので、 $(u_i^*|u_j) = 0$ を考慮すると、(4.9) は Σ 上で

$$\begin{aligned} & \sum_j \sum_i (E_i + E_j) u_i(\tilde{\mathbf{x}}) \int_{\Sigma} u_i^*(\tilde{\mathbf{y}}) c_j u_j(\tilde{\mathbf{y}}) \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{y}})} d\Sigma_0 \\ &= \sum_i c_i u_i(\tilde{\mathbf{x}}) = g(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。(4.10) から $i \neq j$ の寄与はないので、(4.11) の上段は (4.8) の左辺に $\hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ の定義 (4.5) を代入したものに一致する。そこで Σ 上で (4.11) は

$$\int_{\Sigma} \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) g(\tilde{\mathbf{y}}) \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{y}})} d\Sigma_0 = g(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.12)$$

となる。よって、(4.8) が完全性 (4.9) と等価な意味を持つことが確認できた。

(b) $g(\tilde{\mathbf{y}}) = \sum_j d_j u_j^*(\tilde{\mathbf{y}})$

この場合は、(4.8) は

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) g(\tilde{\mathbf{y}}) \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{y}})} d\Sigma_0 \\ &= \sum_i \sum_j \int_{\Sigma} 2E_i u_i(\tilde{\mathbf{x}}) u_i^*(\tilde{\mathbf{y}}) u_j^*(\tilde{\mathbf{y}}) d_j \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{y}})} d\Sigma_0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

である。 Σ 上での直交性は

$$(u_i|u_j^*) = (E_i - E_j) \int_{\Sigma} u_i^*(\tilde{\mathbf{x}}) u_j^*(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{x}})} d\Sigma_0 = 0 \quad (4.14)$$

と書けるので、(4.14) での積分の部分か値を持てるのは $E_i = E_j$ のときのみである。ここで解 $u_j(\tilde{\mathbf{x}})$ に対し、

$$\begin{aligned} & E_j = E_k, \quad u_j^*(\tilde{\mathbf{x}}) = u_{-j}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ & \int_{\Sigma} u_i^*(\tilde{\mathbf{x}}) u_k(\tilde{\mathbf{x}}) \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{x}})} d\Sigma_0 = \frac{1}{2E_i} \delta_{ik} \end{aligned} \quad (4.15)$$

を仮定する。これを踏まえると (4.13) は

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) g(\tilde{\mathbf{y}}) \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{y}})} d\Sigma_0 &= \sum_i \sum_j d_j \delta_{ij} u_{-i}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \sum_j d_j u_j^*(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる。よって、解 $u_j(\tilde{\mathbf{x}})$ が (4.15) を満たせば、(4.8) が成立する。

Minkowski 系では、 $j = \mathbf{k}$, $E_{\mathbf{k}} = k_0$ であり、

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} \quad (4.17)$$

なので、完全性 (4.9) と解の性質 (4.15) は成立している。

同様に加速度系でも、完全性 (4.9) と解の性質 (4.15) が成立すれば、 $\hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ は測度

$d\Sigma_0/\lambda(\tilde{y})$ に対し、 $\delta^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ と一致することが期待出来、 $\hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}}), \hat{\chi}(\tilde{\mathbf{x}})$ は位置 $\tilde{\mathbf{x}}$ に局在した粒子の生成、消滅演算子である。Minkowski 系と同様に、 Σ 上の位置 $\tilde{\mathbf{x}}$ にある 1 粒子状態は

$$|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}})|0\rangle \quad (4.18)$$

である。さらに、体積 $d\Sigma_0/\lambda(\tilde{\mathbf{x}})$ に対する密度演算子 $\hat{\rho}(\tilde{\mathbf{x}})$ 、数演算子 \hat{N} は

$$\hat{\rho}(\tilde{\mathbf{x}}) = \hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}})\hat{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.19)$$

$$\hat{N} = \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_0}{\lambda(\tilde{\mathbf{x}})} \hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}})\hat{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.20)$$

と書ける。(4.20) の n 粒子状態を

$$|\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}}_1)\hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}}_2) \cdots \hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}}_n)|0\rangle \quad (4.21)$$

と書くと、その完全系は

$$\mathbf{1} = |0\rangle\langle 0| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_0^1}{\lambda(\tilde{\mathbf{x}}_1)} \cdots \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_0^n}{\lambda(\tilde{\mathbf{x}}_n)} |\tilde{\mathbf{x}}_1 \cdots \tilde{\mathbf{x}}_n\rangle\langle \tilde{\mathbf{x}}_n \cdots \tilde{\mathbf{x}}_1| \quad (4.22)$$

と書ける。また、位置演算子を

$$\hat{\mathbf{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_0}{\lambda(\tilde{\mathbf{x}})} \hat{\chi}^\dagger(\tilde{\mathbf{x}}) \tilde{\mathbf{x}} \hat{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.23)$$

と定義することにより

$$\hat{\mathbf{X}}|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \tilde{\mathbf{x}}|\tilde{\mathbf{x}}\rangle \quad (4.24)$$

が得られる。これにより、粒子の位置に関し確率解釈が可能となる。また \hat{x}^0 を一定とする他の超平面 Σ' に変更するのは、時間方向の一様性より容易である。

4.2 Rindler 系での局在性の確認

以上のような解 $u_j(\tilde{\mathbf{x}})$ の添字が加算であるかのような取扱では議論は不十分である。そこで、Rindler 系の領域 R_+ での Klein-Gordon 方程式の解を使い具体的に計算し、 $\delta^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ が測度 $d\xi/\xi$ に対し δ -関数として振舞うことを確かめる。

Rindler 系 $\tilde{x} = (\eta, \xi, y, z)$ での Klein-Gordon 方程式の解は

$$\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\tilde{x}) = \frac{(\sinh \pi \rho)^{1/2}}{2\pi^2} e^{-i\rho\eta} e^{ik_y y} e^{ik_z z} K_{i\rho}(Q\xi) \quad (4.25)$$

である。ここで、 $\xi = \sqrt{x^2 - t^2}$, $\eta = \tanh^{-1}(t/x)$, $\rho > 0$, $Q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2 + m^2}$, $K_{i\rho}(Q\xi)$ は変形第 2 種 Bessel 関数である。また、Rindler 系では $\lambda(\tilde{x}) = \xi$ である。(4.4) で定義した演算子は、Rindler 系では

$$\hat{\chi}(\tilde{x}) = \int \sqrt{2\rho} \hat{a}_R(\rho, k_y, k_z) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\tilde{x}) d\rho dk_y dk_z \quad (4.26)$$

$$\hat{\chi}^\dagger(\tilde{x}) = \int \sqrt{2\rho} \hat{a}_R^\dagger(\rho, k_y, k_z) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{x}) d\rho dk_y dk_z \quad (4.27)$$

である。同時刻交換関係は

$$[\hat{\chi}(\tilde{x}), \hat{\chi}^\dagger(\tilde{y})] = \int d\rho dk_y dk_z 2\rho \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\tilde{\mathbf{x}}) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{\mathbf{y}}) \quad (4.28)$$

$$= \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) \quad (4.29)$$

となる。 $\tilde{\mathbf{x}} = (\xi, y, z)$ である。

$\hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ の性質を二つの場合に分け、具体的計算により調べる。

1. $g(\tilde{x}) = \sum_j d_j \bar{u}_{R(j)}(\tilde{x})$
内積を用いた表示は

$$\int_\Sigma \hat{\delta}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) g(\tilde{\mathbf{y}}) \frac{1}{\xi} d\Sigma = \sum_i \left(\bar{u}_{R(i)}^*(\tilde{x}) \bar{u}_{R(i)}(\tilde{y}) |g(\tilde{y})\rangle \right) \Big|_{\tilde{x}^0 = \tilde{y}^0 = 0} \quad (4.30)$$

と書ける。具体的に計算するにあたり、 j を固定する。(4.30) の右辺は

$$\begin{aligned} & \int d\rho dk_y dk_z \left(\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{x}) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\tilde{y}) | \bar{u}_{R(\rho', k'_y, k'_z)}(\tilde{y}) \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho \bar{u}_{R(\rho, k'_y, k'_z)}(\tilde{x}) \int_0^\infty d\xi \frac{\rho + \rho'}{\xi} (\sinh(\pi\rho) \sinh(\pi\rho'))^{1/2} K_{-i\rho}(Q\xi) K_{i\rho'}(Q\xi) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ここで、超平面 Σ を変更しても内積の値は変わらないことを利用し、 Σ を光円錐近傍 ($y^0 \sim y^1$) の超平面に変える。そのため、変数変換

$$\eta = \frac{w+v}{2}, \quad \xi = \exp\left(\frac{v-w}{2}\right) \quad \overleftrightarrow{f} = \overleftrightarrow{\partial}_v \quad (4.32)$$

を行う。光円錐近傍での変形第2種 Bessel 関数の振る舞いは

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} K_{i\rho}(Q\xi) \sim \frac{i\pi}{2 \sinh \pi\rho} \left(\frac{(Q/2)^{i\rho}}{\Gamma(1+i\rho)} e^{i\rho(v-w)/2} - \frac{(Q/2)^{-i\rho}}{\Gamma(1-i\rho)} e^{-i\rho(v-w)/2} \right) \quad (4.33)$$

となる。これらより、(4.31) は

$$\begin{aligned} & \int d\rho dk_y dk_z \left(\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{x}) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\tilde{y}) | \bar{u}_{R(\rho', k'_y, k'_z)}(\tilde{y}) \right) \\ &= \int d\rho \bar{u}_{R(\rho, k'_y, k'_z)}(\tilde{x}) \int dv \frac{-i}{2^2 (\sinh(\pi\rho) \sinh(\pi\rho'))^{1/2}} \\ & \quad \times \left(\frac{(Q/2)^{i\rho}}{\Gamma(1+i\rho)} e^{i\rho v} - \frac{(Q/2)^{-i\rho}}{\Gamma(1-i\rho)} e^{i\rho w} \right) \overleftrightarrow{\partial}_v \left(\frac{(Q/2)^{i\rho'}}{\Gamma(1+i\rho')} e^{-i\rho' v} - \frac{(Q/2)^{-i\rho'}}{\Gamma(1-i\rho')} e^{-i\rho' w} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる。Riemann-Lebesgue の定理より、 $e^{\pm i\rho w}$ のかかる項からの寄与は無視出来る。

$$\begin{aligned} & \int d\rho dk_y dk_z \left(\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{x}) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\tilde{y}) | \bar{u}_{R(\rho', k'_y, k'_z)}(\tilde{y}) \right) \\ &= \int d\rho \bar{u}_{R(\rho, k'_y, k'_z)}(\tilde{x}) \frac{\pi(\rho + \rho') AA'^* \delta(\rho - \rho')}{2 (\sinh(\pi\rho) \sinh(\pi\rho'))^{1/2}} \\ &= \bar{u}_{R(\rho', k'_y, k'_z)}(\tilde{x}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

ここで

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(Q/2)^{i\rho}}{\Gamma(1+i\rho)}, \quad AA^* = \frac{\sinh \pi\rho}{\pi\rho} \quad (4.36)$$

最後に $\tilde{x}^0 = 0$ とおく。これにより、 $\delta^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ となることが示せた。

$$2. g(\tilde{x}) = \sum_i d_j \bar{u}_{R(j)}^*(\tilde{x})$$

解 $\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\tilde{\mathbf{x}})$ は

$$\bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{\mathbf{x}}) = \bar{u}_{R(\rho, -k_y, -k_z)}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.37)$$

である。(4.15) を満たすことを確認する。1 の場合と同様に j を固定し、(4.8) を内積で表示する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{\mathbf{y}}) \frac{d\Sigma_0}{\lambda(\tilde{\mathbf{y}})} \\ &= \int d\rho dk_y dk_z 2\rho \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}(\tilde{x}) \int d\xi dy dz \frac{2\rho}{\xi} \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{y}) \bar{u}_{R(\rho', k'_y, k'_z)}^*(\tilde{y}) \Big|_{\tilde{x}^0 = \tilde{y}^0 = 0} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho 2\rho \bar{u}_{R(\rho, -k'_y, -k'_z)}(\tilde{x}) \int_0^\infty d\xi \frac{2\rho}{\xi} (\sinh(\pi\rho) \sinh(\pi\rho'))^{1/2} K_{-i\rho}(Q\xi) K_{-i\rho'}(Q\xi) \end{aligned} \quad (4.38)$$

と書く。ここで、変形第 2 種 Bessel 関数の積分表示

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh \nu t dt, \quad \left(\Re \nu > -\frac{1}{2}, \Re z > 0 \right) \quad (4.39)$$

より、 $K_{-i\rho}(Q\xi) = K_{i\rho}(Q\xi)$ が成り立つことが分かる。そこで、(4.38) を書き変えて

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) \bar{u}_{R(\rho, k_y, k_z)}^*(\tilde{\mathbf{y}}) \frac{d\Sigma}{\lambda(\tilde{\mathbf{y}})} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho \bar{u}_{R(\rho, -k'_y, -k'_z)}(\tilde{x}) \int_0^\infty d\xi \frac{2\rho}{\xi} (\sinh(\pi\rho) \sinh(\pi\rho'))^{1/2} K_{-i\rho}(Q\xi) K_{i\rho'}(Q\xi) \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる。これにより、この ξ 積分は同時刻で、 $\tilde{y}^0 = 0$ を考えれば (4.31) に等しい。よって、

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \hat{\delta}^3(\tilde{x} - \tilde{y}) g(\tilde{y}) \frac{d\Sigma_0}{\lambda(\tilde{y})} &= d(\rho', k'_y, k'_z) \bar{u}_{R(\rho', -k'_y, -k'_z)}(\tilde{x}) \\ &= d(\rho', k'_y, k'_z) \bar{u}_{R(\rho', k'_y, k'_z)}^*(\tilde{x}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

となる。この場合も $\hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ は測度 $d\Sigma_0/\xi$ に対し $\delta^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}})$ となることが示せた。

以上より、Rindler 系で一般的に、

$$\hat{\delta}^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) = \delta^3(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}) \quad (4.42)$$

であることが示せた。ただし、測度は $(d\xi/\xi) dy dz$ である。

4.3 対称性変換群 $R \otimes R_+$ による基本的粒子描像

Rindler 空間は二つの独立な領域 (Rindler wedge) からなり、各領域の空間方向の形状は半直線 (R_+) である。対称性変換群 $R \otimes R_+$ を基にした粒子描像 ($\hat{a}(x_+), \hat{a}^\dagger(x_+)$) は、付録 A.1 において示したように、 R_+ 上の位置 (x_+) に依って特徴付けられる。これは力学的構造によらないより基礎的な性質である。しかし、時間発展については制限は付かない。

そこで、付録 A.1 で導入した $\hat{\Omega}$ を Hamiltonian として導入すると、多体系における Hamiltonian は

$$\hat{H}_S = \int_0^\infty \frac{dx_+}{x_+} \hat{a}^\dagger(x_+) \bar{\Omega}(x_+) \hat{a}(x_+) \quad (4.43)$$

となる。 $\bar{\Omega}$ は

$$\bar{\Omega}_+ \stackrel{\text{def}}{=} -x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} + \mu^2 x_+^2 \quad (4.44)$$

である。時間を ζ として、 $\hat{a}(x_+, \zeta)$ の Heisenberg の運動方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}(x_+, \zeta) = \bar{\Omega} \hat{a}(x_+, \zeta) \quad (4.45)$$

となり、Schrödinger 方程式型である。

また、Hamiltonian として

$$\hat{H}_{KG} = \int_0^\infty \frac{dx_+}{x_+} \hat{a}^\dagger(x_+) \sqrt{\bar{\Omega}} \hat{a}(x_+) \quad (4.46)$$

を採用する可能性もある。ただし、

$$\sqrt{\bar{\Omega}} \hat{a}(x_+) = \int_0^\infty \frac{dx'_+}{x'_+} G(x_+, x'_+) \hat{a}(x'_+) \quad (4.47)$$

であり、積分核 $G(x_+, x'_+)$ は

$$G(x_+, x'_+) = \int_0^\infty d\Omega \langle x_+ | \Omega \rangle \Omega^{1/2} \langle \Omega | x'_+ \rangle \quad (4.48)$$

である。状態ベクトルなどの表記は付録 A.1 による。また、積分核 $G(x_+, x'_+)$ は非局在的ではあるが、 x_+ 近傍 ($x_+ \sim x'_+$) でのみ大きな値を持つ。積分核の詳細な性質は付録 B.1 を参照。Hamiltonian として (4.46) を採用したときの $\hat{a}(x_+, \zeta)$ の Heisenberg の運動方程式

$$i \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{a}(x_+, \zeta) = \sqrt{\bar{\Omega}} \hat{a}(x_+, \zeta) \quad (4.49)$$

は多少複雑であるが、時間に関し 2 階の微分方程式に書き換えれば

$$-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \hat{a}(x_+, \zeta) = \bar{\Omega} \hat{a}(x_+, \zeta) \quad (4.50)$$

となり、Klein-Goldon 型である。そこで、4.2 節における (ξ, η) と (x_+, ζ) を同一視すれば、

$$\hat{\chi}(\xi, \eta) = \hat{a}(x_+, \zeta), \quad \hat{\chi}^\dagger(\xi, \eta) = \hat{a}^\dagger(x_+, \zeta) \quad (4.51)$$

という関係を得る。

また、一体の確率振幅は

$$|\psi(\zeta)\rangle = \int_0^\infty \frac{dx_+}{x_+} \psi(x_+) \hat{a}^\dagger(x_+, \zeta) |\tilde{0}\rangle = \int_0^\infty \frac{dx_+}{x_+} \psi(x_+, \zeta) \hat{a}^\dagger(x_+) |\tilde{0}\rangle \quad (4.52)$$

である。ただし、 $\hat{a}(x_+) |\tilde{0}\rangle = \hat{a}(x_+, \zeta) |\tilde{0}\rangle = 0$ 。同時刻の状態の内積は

$$\langle \psi(\zeta) | \psi'(\zeta) \rangle = \int_0^\infty \frac{dx_+}{x_+} \psi^*(x_+, \zeta) \psi'(x_+, \zeta) \quad (4.53)$$

である。確率振幅の Schrödinger 方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi(x_+, \zeta) = \sqrt{\bar{\Omega}} \psi(x_+, \zeta) \quad (4.54)$$

である。

Poincaré 群を基にした、Minkowski 空間の粒子描像と比較するため、同時刻の内積 (4.53) を拡張する。そこで、新たな共変関数を

$$\phi_R(x_+, \zeta) = \int_0^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} D_\rho(x_+) e^{-i\rho\zeta} \phi_R(\rho) \quad (4.55)$$

と導入する。(4.55) での各関数は

$$\phi_R(\rho) = \int_0^\infty \frac{dx_+}{x_+} \psi(x_+) D_\rho^*(x_+) \quad (4.56)$$

$$D_\rho(x_+) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} K_{i\rho}(mx_+) \quad (4.57)$$

である。 $D_\rho(x_+)$ は

$$\bar{\Omega} D_\rho(x_+) = \rho^2 D_\rho(x_+) \quad (4.58)$$

を満たす固有関数で、ここでは $\rho > 0$ を取る。これにより、内積 (4.53) は

$$\langle \psi(\zeta) | \psi'(\zeta) \rangle = -i \int_0^\infty \frac{dx_+}{x_+} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \phi_R^*(x_+, \zeta) \right) \phi'_R(x_+, \zeta) - \phi_R^*(x_+, \zeta) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \phi'_R(x_+, \zeta) \right) \right) \quad (4.59)$$

と書け、一般的超平面へ

$$\langle \psi(\zeta) | \psi'(\zeta) \rangle = -i \int_\Sigma \psi^* \overset{\leftrightarrow}{f}^\mu \psi' d\Sigma_\mu, \quad \overset{\leftrightarrow}{f}^\mu = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \vec{\partial}_\nu - \overleftarrow{\partial}_\nu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \quad (4.60)$$

と拡張ができる。しかし、 $x^0 = \xi \sinh \eta$, $x^1 = \xi \cosh \eta$ より

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = x^1 \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^1} \quad (4.61)$$

となるため、Minkowski 空間との比較は、 $\rho > 0$ だけではできない。そこで、 $\rho < 0$ も考慮し、量子場を

$$\hat{\phi}_R(x_+, \zeta) = \int_0^\infty \frac{dx'_+}{x'_+} \times \left(\left(\int_0^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} D_\rho(x_+) e^{-i\rho\zeta} D_\rho^*(x'_+) \right) \hat{a}(x'_+) + \left(\int_0^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} D_\rho^*(x_+) e^{i\rho\zeta} D_\rho(x'_+) \right) \hat{a}^\dagger(x'_+) \right) \quad (4.62)$$

と導入する。これは、

$$\langle 0 | \hat{\phi}_R(x_+, \zeta) | \psi \rangle = \phi_R(x_+, \zeta), \quad \langle \psi | \hat{\phi}_R(x_+, \zeta) | 0 \rangle = \phi_R^*(x_+, \zeta) \quad (4.63)$$

と対応が取れるためである。

もう一つの Rindler wedge における量子場も同様に構成する。

$$\hat{\phi}_L(x_+, \zeta) = \int_0^\infty \frac{dx'_+}{x'_+} \times \left(\left(\int_0^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} D_\rho(x_+) e^{-i\rho\zeta} D_\rho^*(x'_+) \right) \hat{b}(x'_+) + \left(\int_0^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} D_\rho^*(x_+) e^{i\rho\zeta} D_\rho(x'_+) \right) \hat{b}^\dagger(x'_+) \right) \quad (4.64)$$

ただし、 $(\hat{b}(x_+), \hat{b}^\dagger(x_+))$ は独立な生成、消滅演算子である。

さらに、Poincaré 群を基にする Minkowski 空間の量子場も同様の方法で

$$\hat{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^\infty dk (u_k(x, t) \hat{a}(k) + u_k^*(x, t) \hat{a}^\dagger(k)), \quad u_k(x, t) = \frac{e^{ikx - i\omega_k t}}{\sqrt{(2\pi)2\omega_k}} \quad (4.65)$$

と構成する [41]。ただし、 $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ 。そして、 $\zeta = \eta$, $x_+ = \xi$ を取り、

$$\hat{\phi}(x, t) = \theta(\xi) \hat{\phi}_R(\xi, \eta) + \theta(-\xi) \hat{\phi}_L(-\xi, \eta), \quad t = \xi \sinh \eta, \quad x = \xi \cosh \eta \quad (4.66)$$

として比較すれば良い。これにより第 3 章および第 4.2 節で行った考察および公式が成立していることが確認できる。

(4.66) は、二つのスピン (\vec{S}_1, \vec{S}_2) の合成 $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{L})$ に対応する式でもある。

第5章 Rindler 空間における相対論的量子纏れの空間的構造

第2章と付録Aで示したように、対称性変換群のユニタリー表現を基に粒子描像を構成したとき、Poincaré群を使うMinkowski空間では運動量で特徴付けられる生成、消滅演算子 $(\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k))$ が基本である。真空は

$$\hat{a}(k)|0\rangle = 0 \quad (5.1)$$

と定義され、空間的に大局的なものである。

一方、第2章と第4章および付録Aの議論より、 $R \otimes R_+$ 群のユニタリー表現を基にするRindler空間の基本的粒子描像は、空間的位置によって特徴付けられる生成、消滅演算子 $(\hat{\chi}^i(\xi^i), \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi^i))$ である。そして、真空は

$$\hat{\chi}^i(\xi^i)|0^i\rangle = 0, \quad i = L, R \quad (5.2)$$

と空間的に局在的なもので、二つの粒子描像が共存する。

この章での研究対象は、構成要素はRindler空間における基本的粒子描像であり、合成される状態ベクトルはMinkowski空間における真空である。Minkowski空間の真空をRindler空間の基本的粒子描像で構成するのに共変的な場の量の合成則(4.66)を使う。これによって合成されたMinkowski空間の真空は量子纏れ状態である。そこで、その空間的構造を調べる。

この量子纏れの様子は

1. 左右のRindler wedgeで、原点からの距離が同じ状態の量子纏れが強い。
2. また、その距離がある点に達すると急激に弱くなる。
3. この急激に弱くなる距離に、座標系としての特徴が現れる。

である。これらの様子は、注目する状態が混合状態のためネガティビティと呼ばれる量による量子纏れの基準を通し調べた。Minkowski系の真空の場合、この基準は基本的粒子描像から定義される正準量の相関で読み替えられる。

正準量の相関は共変的な場の量と直接結びつかない。そこで、Wightman関数とこの相関との関係を調べる。座標系の選択(参照基準系)は観測者が等速運動しているかあるいは等固有加速度運動しているかによって決まる。そこで、この座標系選択を反映させるため、観測者とともに動く検出器系を導入する。検出器系は検出器場と間接的に観測する対象場からなる。相互作用項はこれらの場を共変的に結合させる。参照基準系により、検出器場は制御されるので、相互作用項を通して対象場も間接的に制御され、左右領域の相関を調べることができる。

この検出器系を、Minkowski 空間の真空の密度演算子を通した期待値、および瞬間近似を使った遷移振幅に適用する。顕著な結果は左右の相関の消失する点に現れる。これらの性質と正準量の相関との関係を議論する。

この章での解析の前提は、Rindler 空間での粒子描像の Minkowski 空間での完全性である。このことは、Minkowski 空間で定義された Wightman 関数を Rindler 空間での粒子描像で直接計算することにより、証明されている [28]。

5.1 合成系における量子纏れ

Einstein、Podolsky、Rosen 達によって、ある思考実験を基に、量子力学的記述の不完全性が主張された。この主張に対する Bohr の反論こそが「量子纏れ」研究の出発点である。量子纏れの本質は、「量子力学的状態は大局的なもの」である。ここでの大局的という意味は、「合成系の状態は構成要素の状態で因子化できるとは限らない」ということである。それ以後多くのモデルが提唱されたが、その中で最も有名なものは、構成要素は2つのスピン 1/2 の状態で合成系の状態はスピン 0 のモデルであろう。このモデルより導き出される Bell の不等式は、実験的にも調べられ、隠れた変数の可能性を否定し通常量子力学的記述を確立させた。このモデルの重要な点は、独立な構成要素に対する、独立な観測と座標系の方向の独立な選択である。

この章では、構成要素として Rindler 空間の独立な2つの領域 (wedge) における粒子描像を、合成系の状態としては Minkowski 空間の真空を取る。ここでの粒子描像は調和振動子と同義なので、2個の調和振動子から成る合成系での量子纏れを簡単に復習しておく。

2つの生成、消滅演算子 ($\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$) 及び正準量である Hermitian 演算子 (\hat{q}_i, \hat{p}_i) を

$$\hat{q}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger), \quad \hat{p}_i = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger), \quad i = 1, 2 \quad (5.3)$$

と導入する。2つの調和振動子から成る適当な規格化された状態ベクトルを $|\psi_{12}\rangle$ とする。「この状態ベクトルは量子纏れ状態か」が問題である。すなわち、「 $|\psi_{12}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ でないこと」を示せるかということである。

また、Minkowski 空間の真空は純粋状態であるが、この状態を合成系の状態としてみたとき、基本的構成要素の取り方、そしてその要素のうち注目する自由度の取り出し方によってはその自由度の状態は混合状態になりうる。そこで、量子纏れの基準の一般化も必要である。

純粋状態の場合、この問題に一つの判断基準を与えるのがネガティビティ $\Xi(\hat{\rho}_{12})$ という量 [36][37] である。 $\hat{\rho}_{12}$ を密度演算子 $|\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}|$ とする。この密度演算子を正規完全直交系 $|n_1\rangle|n_2\rangle$ で

$$\hat{\rho}_{12} = \sum_{n_1, n_2; n'_1, n'_2} |n_1\rangle|n_2\rangle (\langle n_2|\langle n_1|\hat{\rho}_{12}|n'_1\rangle|n'_2\rangle) \langle n'_2|\langle n'_1| \quad (5.4)$$

と表現する。この密度演算子の表現に対し、 n_1 のみを転置した量 $\hat{\rho}_{12}^{T_1}$ を

$$\hat{\rho}_{12}^{T_1} = \sum_{n_1, n_2; n'_1, n'_2} |n'_1\rangle|n_2\rangle (\langle n_2|\langle n'_1|\hat{\rho}_{12}|n_1\rangle|n'_2\rangle) \langle n'_2|\langle n_1| \quad (5.5)$$

と定義する。この二つの演算子は、状態ベクトル $|\psi_{12}\rangle$ が規格化されているため、

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_{12}) = \text{Tr}(\hat{\rho}_{12}^{T_1}) = 1 \quad (5.6)$$

である。また、 $\hat{\rho}_{12}$ の行列表現のすべての固有値は正であるが、一方 $\hat{\rho}_{12}^{T_1}$ の固有値 (λ_i) は正とは限らない。しかし、 $|\psi_{12}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ のときは $\hat{\rho}_{12}^{T_1}$ の固有値もすべて正となることは容易に確認できる。そこで、もし $\hat{\rho}_{12}^{T_1}$ の固有値に負が存在すれば量子纏れしていると言え、量子纏れの一つの判断基準を与える。この基準は Peres 基準 [33] と呼ばれる。

また、 λ_i のうち、負の固有値の絶対値を取ったものを加え合わせた量

$$\Xi(\hat{\rho}_{12}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\{i:\lambda_i < 0\}} |\lambda_i| \quad (5.7)$$

をネガティビティと定義する。 $\Xi(\hat{\rho}_{12})$ がゼロでなければ状態 $|\psi_{12}\rangle$ は量子纏れしていることになる。

この基準は万能ではないが、混合状態にも適用できる。混合状態の場合、密度演算子が

$$\hat{\rho}_{12} = \sum_i p^i |\psi_{12}^i\rangle \langle \psi_{12}^i|, \quad p^i \geq 0 \quad (5.8)$$

と書けるとき量子纏れはないと定義を一般化する [34]。ただし、 $|\psi_{12}^i\rangle = |\psi_1^i\rangle \otimes |\psi_2^i\rangle$ 。混合状態に対し、(5.8) を満たす密度演算子の (5.5) に対応した式は

$$\hat{\rho}_{12}^{T_1} = \sum_{n_1, n_2; n'_1, n'_2} \sum_i |n'_1\rangle \langle n_2| (p^i \langle n'_1 | \psi_1^i \rangle \langle \psi_1^i | n_1 \rangle \langle n_2 | \psi_2^i \rangle \langle \psi_2^i | n'_2 \rangle) \langle n'_2 | \langle n_1 | \quad (5.9)$$

となり、固有値はすべて正であることが確認できる。そこで、混合状態へ Peres 基準は一般化出来る [35]。これにより、負の固有値の絶対値の和であるネガティビティは、構成要素の取り方により状態が混合状態になる相対論的量子纏れの空間構造を調べる上で一つの基準を与える、重要な量となる。

実際にネガティビティを計算するのは困難であるが、 $|\psi_{12}\rangle$ が Gauss 状態であれば計算可能であり、混合状態に関する基準は成立する [35]。今、 $\hat{R}_\alpha = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2)$ とし、

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{O} \hat{\rho}_{12}) \quad (5.10)$$

とする。Gauss 状態とは、あらゆるモーメント $\langle \hat{R}_{\alpha_1} \cdots \hat{R}_{\alpha_n} \rangle$ が 2 次までのモーメント $\langle \hat{R}_\alpha \rangle$, $\langle \hat{R}_{\alpha_1} \hat{R}_{\alpha_2} \rangle$ で決まる状態のことをいう。

Gauss 状態におけるネガティビティの公式 [37] を示す。計算の詳細は [42] を参照。まず、必要となる量を定義する。

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} M_1 & M_{12} \\ M_{21} & M_2 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle \hat{q}_1 \hat{q}_1 \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{p}_1 \hat{q}_1 + \hat{q}_1 \hat{p}_1 \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{p}_1 \hat{q}_1 + \hat{q}_1 \hat{p}_1 \rangle & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_1 \rangle \end{pmatrix}, \quad M_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle \hat{q}_2 \hat{q}_2 \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{p}_2 \hat{q}_2 + \hat{q}_2 \hat{p}_2 \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{p}_2 \hat{q}_2 + \hat{q}_2 \hat{p}_2 \rangle & \langle \hat{p}_2 \hat{p}_2 \rangle \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$M_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle \hat{q}_1 \hat{q}_2 \rangle & \langle \hat{q}_1 \hat{p}_2 \rangle \\ \langle \hat{p}_1 \hat{q}_2 \rangle & \langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad M_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \langle \hat{q}_2 \hat{q}_1 \rangle & \langle \hat{q}_2 \hat{p}_1 \rangle \\ \langle \hat{p}_2 \hat{q}_1 \rangle & \langle \hat{p}_2 \hat{p}_1 \rangle \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$\Delta(M) \stackrel{\text{def}}{=} \det(M), \quad \tilde{\Delta}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \det(M_1) + \det(M_2) - \det(M_{12}) - \det(M_{21}) \quad (5.14)$$

これらの量を使うと、ネガティビティは

$$\Xi(\hat{\rho}_{12}) = \max \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\Delta}(M) - \sqrt{\tilde{\Delta}(M)^2 - 4\Delta(M)}}} - \frac{1}{2}, 0 \right) \quad (5.15)$$

と与えられる。

2個の調和振動子の場合、 $\det(M_{12}) = \det(M_{21}) = 0$ となれば、 $\tilde{\Delta}(M) = 1/2$ となり、 $\Xi(\hat{\rho}_{12}) = 0$ となることが確認できる。これは、2個の振動子の相関と判断基準であるネガティビティが直接結びついていることを示す。

5.2 Rindler 系での粒子描像と D 関数の定義

2次元時空を考え、空間的超平面 Σ を取る。Rindler 系での議論の見通しを良くするため、変数 ξ_* を

$$\xi_*^i = \log \frac{|\xi|}{\alpha}, \quad i = R, L \quad (5.16)$$

と定義し導入する。ここで、 α は長さの次元を持つ正の数である。また、右側領域 ($\xi > 0$) での ξ_* を ξ_*^R 、左側領域 ($\xi < 0$) での ξ_* を ξ_*^L と書くことにする。 ξ_*^i を取ることで、定義域が $-\infty < \xi_*^i < \infty$ となり扱い安くなる。Klein-Gordon 方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_*^i{}^2} + \alpha^2 m^2 e^{2\xi_*^i} \right) \phi(\xi_*^i, \eta) = 0 \quad (5.17)$$

と書け、変形 Bessel 関数の微分方程式 (3.47) は

$$(-\partial_{\xi_*^i}^2 + \alpha^2 m^2 e^{2\xi_*^i}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^i}) = \rho^2 K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^i}) \quad (5.18)$$

と書ける。ただし、 $\zeta = \alpha m e^{\xi_*^i}$ 、 $i\rho = \nu$ である。

対称性変換群から決まる Rindler 系での粒子描像 ($\hat{\chi}^i(\eta, \xi_*^i)$, $\hat{\chi}^{i\dagger}(\eta, \xi_*^i)$) を確認しておく。

1. 同時刻交換関係

$$\begin{aligned} [\hat{\chi}^i(\eta, \xi_*^i), \hat{\chi}^{j\dagger}(\eta, \xi_*^{j'})] &= \delta_{ij} \delta(\xi_*^i - \xi_*^{j'}), \\ [\hat{\chi}^i(\eta, \xi_*^i), \hat{\chi}^j(\eta, \xi_*^{j'})] &= [\hat{\chi}^{i\dagger}(\eta, \xi_*^i), \hat{\chi}^{j\dagger}(\eta, \xi_*^{j'})] = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

2. 真空

$$\hat{\chi}^i(\eta, \xi_*^i) |\bar{0}^i\rangle = 0, \quad |\bar{0}\rangle = |\bar{0}^L\rangle \otimes |\bar{0}^R\rangle \quad (5.20)$$

3. n 粒子状態

$$|\xi_{*1}^i \cdots \xi_{*n}^i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_{*1}^i) \cdots \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_{*n}^i) |\bar{0}^i\rangle \quad (5.21)$$

4. 数演算子

$$\hat{N}^i = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^i \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i) \hat{\chi}^i(\xi_*^i) \quad (5.22)$$

5. 完全性

$$\mathbf{1}^i = |\bar{0}^i\rangle\langle\bar{0}^i| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{1*}^i \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{n*}^i |\xi_{1*}^i \cdots \xi_{n*}^i\rangle\langle\xi_{1*}^i \cdots \xi_{n*}^i| \quad (5.23)$$

6. Rindler 系での物理量：位置演算子 \hat{X}_*^i 、スケール演算子 $\hat{\Pi}_*^i$

$$\hat{X}_*^i = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^i \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i) \xi_*^i \hat{\chi}(\xi_*^i) \quad (5.24)$$

$$\hat{\Pi}_*^i = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^i \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i) \overleftrightarrow{\partial}_{\xi_*^i} \hat{\chi}(\xi_*^i) \quad (5.25)$$

$$(5.26)$$

各領域での変形第2種 Bessel 関数の直交性 (B.2) と完全性 (B.3) を利用して、新たな粒子描像 ($\hat{a}^i(\rho)$, $\hat{a}^{i\dagger}(\rho)$) を

$$\hat{a}^i(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^i \hat{\chi}^i(\xi_*^i) D_\rho^*(\xi_*^i), \quad \hat{a}^{i\dagger}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^i \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i) D_\rho(\xi_*^i) \quad (5.27)$$

と導入する。 $D_\rho(\xi_*^i)$ は

$$D_\rho(\xi_*^i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^i}) \quad (5.28)$$

である。同時刻交換関係は

$$[\hat{a}^i(\rho), \hat{a}^{j\dagger}(\rho')] = \delta_{ij} \delta(\rho - \rho'), \quad [\hat{a}^{i\dagger}(\rho), \hat{a}^{j\dagger}(\rho')] = [\hat{a}^i(\rho), \hat{a}^j(\rho')] = 0 \quad (5.29)$$

となることは容易に確認できる。

逆変換は

$$\hat{\chi}^i(\eta, \xi_*^i) = \int_0^\infty d\rho \hat{a}^i(\rho) e^{-i\rho\eta} D_\rho(\xi_*^i) \quad (5.30)$$

$$\hat{\chi}^{i\dagger}(\eta, \xi_*^i) = \int_0^\infty d\rho \hat{a}^{i\dagger}(\rho) e^{i\rho\eta} D_\rho^*(\xi_*^i) \quad (5.31)$$

である。

以後の議論の対象は、Rindler 空間の独立な各 Rindler wedge から合成された Minkowski 空間である。そこでの議論に使われるもう一つの D 関数を

$$\hat{a}^i(\rho) \bar{u}_\rho^i(\xi_*^i) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*'^i \hat{\chi}^i(\xi_*'^i) D_\rho(\xi_*^i, \xi_*'^i) \quad (5.32)$$

と定義しておく。 $D_\rho(\xi_*^i, \xi_*'^i)$ は

$$D_\rho(\xi_*^i, \xi_*'^i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi^2} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^i}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*'^i}) \quad (5.33)$$

で、 $\bar{u}_\rho^i(\xi_*^i)$ は

$$\bar{u}_\rho^i(\xi_*^i) = \frac{\sqrt{\sinh \pi\rho}}{\pi} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^i}) \quad (5.34)$$

である。

5.3 合成系としての Minkowski 系の真空と量子縫れ

$t = \eta = 0$ 超平面での基本的構成要素である Rindler 系の粒子描像と合成系としての Minkowski 系の粒子描像の関係は

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_L(\xi_*^L) + \hat{\phi}_R(\xi_*^R) \quad (5.35)$$

である。ここでの $\hat{\phi}(x)$, $\hat{\phi}_i(\xi_*^i)$ は

$$\hat{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk (u_k(x)\hat{a}(k) + u_k^*(x)\hat{a}^\dagger(k)) \quad (5.36)$$

$$\hat{\phi}_i(\xi_*^i) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^{i'} \left(\int_0^{\infty} d\rho \hat{D}_\rho(\xi_*^i, \xi_*^{i'}) \right) \chi^i(\xi_*^{i'}) + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^{i'} \left(\int_0^{\infty} d\rho \hat{D}_\rho^*(\xi_*^i, \xi_*^{i'}) \right) \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^{i'}) \quad (5.37)$$

である。ただし、

$$u_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{(2\pi)2\omega_k}}, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$$

である。

そして、合成される状態は Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ で、条件は

$$\hat{a}(k)|0\rangle = 0 \quad (5.38)$$

である。Minkowski 系の真空と Rindler 系の粒子描像との関係は

$$|0\rangle = \prod_{\rho} \left(C_{\rho} \exp(e^{-\pi\rho} \bar{a}^{L\dagger}(\rho) \bar{a}^{R\dagger}(\rho)) \right) |\bar{0}\rangle \quad (5.39)$$

$$C_{\rho} = \sqrt{1 - e^{-2\pi\rho}}$$

である。形式的には

$$|0\rangle = N \exp \int_0^{\infty} d\rho (e^{-\pi\rho} \bar{a}^{L\dagger}(\rho) \bar{a}^{R\dagger}(\rho)) |\bar{0}\rangle \quad (5.40)$$

と書ける。規格化定数 N は明確には定義できない。また、exp 部分は Taylor 展開することで定義する。Minkowski 系の真空は、左右領域の Rindler 系の粒子を同数含む状態の和として表現される。このことから、Minkowski 系の真空は、独立な Rindler wedge の状態の量子縫れ状態であると理解できる。

次に、Rindler 系の左右領域に局在した状態

$$|\xi_*^R\rangle \otimes |\xi_*^{L'}\rangle = \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_*^R) |\bar{0}^R\rangle \otimes \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_*^{L'}) |\bar{0}^L\rangle \quad (5.41)$$

を導入し、内積

$$f(\xi_*^R, \xi_*^{L'}) = \langle \xi_*^R | \otimes \langle \xi_*^{L'} | 0 \rangle \quad (5.42)$$

を取る。この内積より作られる関数 $f(\xi_*^R, \xi_*^{L'})$ の絶対値の2乗は、Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ に Rindler 系での粒子が位置 ξ_*^R と $\xi_*^{L'}$ に存在する確率である。 $f(\xi_*^R, \xi_*^{L'})$ は実関数であるので、確率振幅で議論を進める。

$f(\xi_*^R, \xi_*'^L)$ は、

$$\langle \xi_*^R | = \langle \bar{0}^R | \int_0^\infty d\rho \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} \hat{a}^R(\rho) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^R}) \quad (5.43)$$

$$\langle \xi_*'^L | = \langle \bar{0}^L | \int_0^\infty d\rho \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} \hat{a}^L(\rho) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*'^L}) \quad (5.44)$$

を用いると、

$$f(\xi_*^R, \xi_*'^L) = NF(\xi_*^R, \xi_*'^L) \quad (5.45)$$

$$F(\xi_*^R, \xi_*'^L) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho \rho (1 - e^{-2\pi\rho}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^R}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*'^L}) \quad (5.46)$$

となる。先に注意したように、規格化定数 N は明確に定義された量ではないので、それを除き関数 $F(\xi_*^R, \xi_*'^L)$ を定義した。関数 $F(\xi_*^R, \xi_*'^L)$ は、Rindler 系の 2 粒子状態に限り、その 2 粒子の位置 $(\xi_*^R, \xi_*'^L)$ の変化に関する相対的確率振幅と理解できる。ただし、各々の ξ_*^i は原点からの距離 $(|\xi_*^i|)$ から (5.16) に従い導入した量である。

変形第 2 種 Bessel 関数の関係式

$$K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^R}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*'^L}) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda}{2} e^{i\rho\lambda} K_0(m\alpha A(\lambda)) \quad (5.47)$$

$$A^2(\lambda) = e^{2\xi_*^R} + e^{2\xi_*'^L} + 2e^{\xi_*^R + \xi_*'^L} \cosh \lambda \quad (5.48)$$

より

$$F(\xi_*^R, \xi_*'^L) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty d\lambda K_0(m\alpha A(\lambda)) \int_0^\infty d\rho \rho (1 - e^{-2\pi\rho}) e^{i\rho\lambda} \quad (5.49)$$

となる。ここで、(5.49) の λ 積分を数値的に実行するため、収束因子 $e^{-\beta\rho}$, ($\beta > 0$) を導入する。(5.46) の収束性を見るのに、第 2 種 Bessel 関数の完全性の式 (B.3)

$$\int_0^\infty d\rho \frac{2\rho \sinh \pi\rho}{\pi^2} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*'}) = \delta(\xi_* - \xi_*') \quad (5.50)$$

と比較する。(5.46) の $e^{-\pi\rho}(e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho})$ は (5.50) の $\sinh \pi\rho$ より、 $\rho \rightarrow \infty$ に対し収束性が良いことが分かる。また、(5.49) の ρ 積分を、収束因子 $e^{-\beta\rho}$ を導入し実行すると

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\rho \rho (1 - e^{-2\pi\rho}) e^{(i\lambda - \beta)\rho} \\ &= \left(\frac{1}{(\beta - i\lambda)^2} - \frac{1}{(\beta - i\lambda + 2\pi)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.51)$$

を得る。これにより、 $F(\xi_*^R, \xi_*'^L)$ は

$$F(\xi_*^R, \xi_*'^L) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda}{2\pi^2} K_0(m\alpha A(\lambda)) \left(\frac{1}{(\beta - i\lambda)^2} - \frac{1}{(\beta - i\lambda + 2\pi)^2} \right) \quad (5.52)$$

である。(5.52) より、付録 B.1 で議論したような、 $\beta \rightarrow 0$ で極が積分経路を横切ることはないことが分かる。よって、収束因子の導入の目的は数値積分の収束性を良くするためのみである。

また、

$$\langle \xi_{*\beta}^R | = \langle \bar{0}^R | \int_0^\infty d\rho \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} \hat{a}^R(\rho) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^R}) e^{-\frac{\beta}{2}\rho} \quad (5.53)$$

$$\langle \xi_{*\beta}^L | = \langle \bar{0}^L | \int_0^\infty d\rho \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} \hat{a}^L(\rho) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^L}) e^{-\frac{\beta}{2}\rho} \quad (5.54)$$

と状態ベクトルを正則化をすれば、超関数に関わる問題も避けられる。

(5.52) の数値積分を行う。 β の値による依存性を見るために、例として計算可能な β の値の範囲で $\beta = 1$ の場合と $\beta = 0.09$ を実行した¹。まず、 $\beta = 1$ の場合は図 5.1 となる。

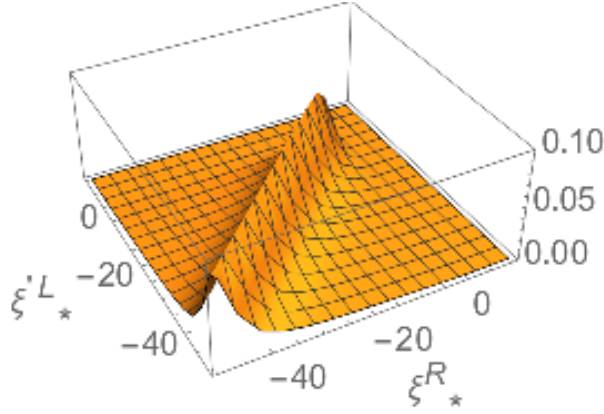


図 5.1. Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ に Rindler 系の粒子が位置 ξ_*^R, ξ_*^L に存在する相対的確率振幅 $F(\xi_*^R, \xi_*^L)$ 。収束因子は $\beta = 1$ 。

続いて、 $\beta = 0.09$ の場合は図 5.2 となる。これらから、 β の値の違いから、大きな数値的变化はないことが分かる。

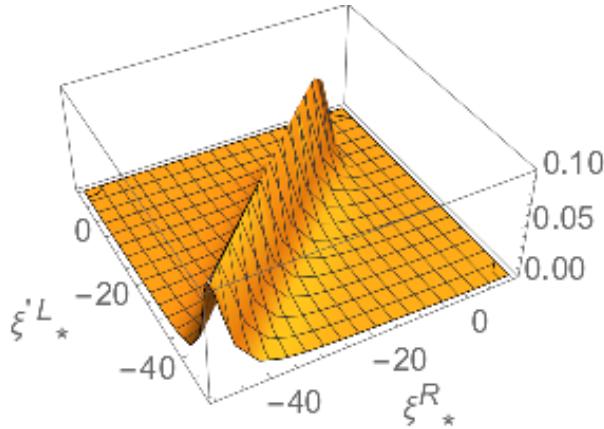


図 5.2. Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ に Rindler 系の粒子が位置 ξ_*^R, ξ_*^L に存在する相対的確率振幅 $F(\xi_*^R, \xi_*^L)$ 。収束因子は $\beta = 0.09$ 。

¹ $m = \alpha = 1$

図 5.1、図 5.2 から、原点からの距離に対応する ξ_*^R と ξ_*^L が同じような値もつ領域で、 $F(\xi_*^R, \xi_*^L)$ は大きな値を持つことが分かる。しかし、これは $\delta(\xi_*^R - \xi_*^L)$ が数値計算のため広がった訳ではない。なぜなら、 ρ に関する被積分関数の $\rho \rightarrow \infty$ での振る舞いは、 $\delta(\xi_*^R - \xi_*^L)$ の場合より良いためである。これにより幅を持つと考えられる。

また、 ξ_* の負の領域で、 $F(\xi_*^R, \xi_*^L)$ は値を持つ理由は、 ξ_* 座標での Klein-Gordon 方程式 (B.5) の有効ポテンシャル項が $\xi_* < 0$ のとき減衰するためである。そのため、Rindler 粒子が $\xi_* < 0$ 領域で存在しやすい。 $m\alpha = 1$ と $m\alpha = 10^5$ の場合に分けて、 $\xi_*^R = \xi_*^L$ の部分を図示する。 $m\alpha = 1$ のときは図 5.3、 $m\alpha = 10^5$ のときは図 5.4 である。

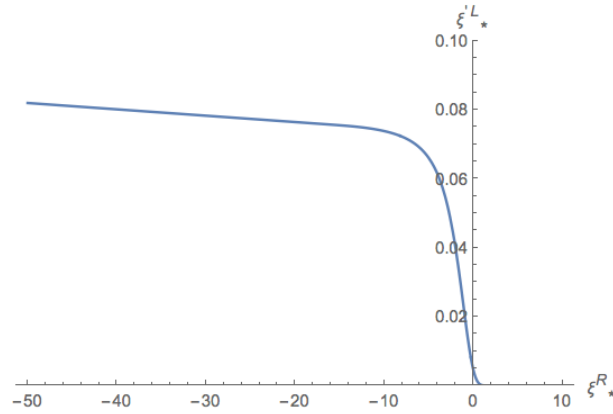


図 5.3 $\xi_*^R = \xi_*^L$ のときの相対的確率振幅 $F(\xi_*^R, \xi_*^L)$ 。 $m\alpha = 1$

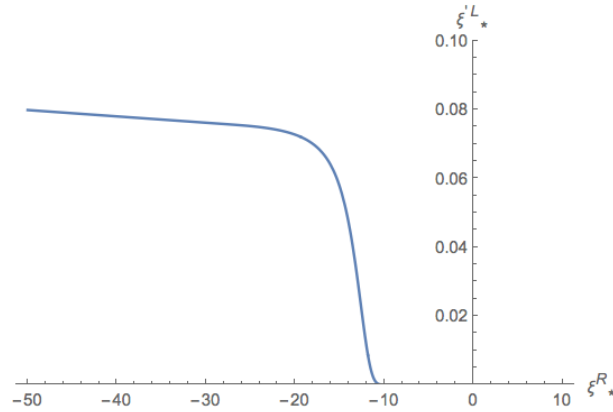


図 5.4 $\xi_*^R = \xi_*^L$ のときの相対的確率振幅 $F(\xi_*^R, \xi_*^L)$ 。 $m\alpha = 10^5$

図 5.3、図 5.4 より、質量との関係でみると $m\alpha$ が小さいとき、ピークの立ち上がりは変数 ξ の原点から遠ざかる方向へ移る。逆に $m\alpha$ が大きいときは原点へ向かう。これは α を固定したとき、軽い粒子ほど遠くまで相関があることを示している。

以上をまとめると Minkowski 系の真空の 2 体部分は

$$|0\rangle_2 \propto \int d\xi_*^R d\xi_*^L F(\xi_*^R, \xi_*^L) |\xi_*^R\rangle \otimes |\xi_*^L\rangle \quad (5.55)$$

と書け、相対的確率振幅 $F(\xi_*^R, \xi_*^L)$ は $F_R(\xi_*^R)F_L(\xi_*^L)$ と因子化出来ない。これにより、基

本的構成要素として粒子描像 ($\hat{\chi}^i(\xi_*^i), \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i)$) を取ったとき、Minkowski 系の真空は量子纏れ状態であることが分かる。

最後に、 $F(\xi_*^R, \xi_*^L)$ を使い Minkowski 系の真空を表わすと

$$|0\rangle = N \exp \left(\int d\xi_*^R d\xi_*^L \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_*^R) F(\xi_*^R, \xi_*^L) \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_*^L) \right) |\bar{0}\rangle \quad (5.56)$$

となる。ただし、 N は明確に定義されていないので形式的である。exp は展開によって定義される。この表示から分かることは、左右の領域の粒子数は同数であり、各粒子ごとの状態は量子纏れ状態である。また、 ξ_*^R および ξ_*^L を固定すれば形式的ではあるが、

$$|0\rangle_{\xi_*^R \xi_*^L} = \sqrt{1 - (F(\xi_*^R, \xi_*^L))^2} \exp \left(\hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_*^R) F(\xi_*^R, \xi_*^L) \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_*^L) \right) |\bar{0}\rangle \quad (5.57)$$

とも書け、(5.57) に対し、 $\xi_*^R = \xi_*^L = \xi_*$ とした密度演算子を $\hat{\rho}(\xi_*) = |0\rangle_{\xi_* \xi_*} \times {}_{\xi_* \xi_*} \langle 0|$ と近似したときのネガティビティ(5.7)は

$$\Xi((\hat{\rho}(\xi_*))) = \frac{(F(\xi_*, \xi_*))^2}{2(1 - (F(\xi_*, \xi_*))^2)} \quad (5.58)$$

と計算される。図 5.3、図 5.4 より、この量子纏れは原点近傍の現象と言える。また、その纏れ具合は質量により、軽い質量ほど遠くまで纏れる。

5.4 ネガティビティと平行移動

(5.39) から分かるように、 η に関するエネルギー ρ を固定すれば他のモードから分離できる。そのため、他のモードに関し跡を取ることににより除くと、左右の wedge 間の量子纏れは純粋状態の量子纏れとして調べることが出来る [13]。一方、位置で特徴付けられた粒子描像による表現 (5.56) は、左右 wedge の位置を決めてもその状態を完全に分離できず、他の状態からの影響が残る。これは、跡を取っても重みとしてその影響は残り混合状態となることを意味する。このような状況での量子纏れの判断基準は万能ではないが Peres 基準を採用するのが妥当である。またこの判断基準は、調和振動子の場合、ネガティビティを通し二つの振動子間の相関で与えることが出来、場の量子論として、形式的な部分もあるが、扱いやすい。

5.4.1 Minkowski 系の真空のネガティビティ

ξ_*^L, ξ_*^R を固定すれば、 $\hat{\chi}^i(\xi_*^i), \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i)$ は、真空 $|\bar{0}^i\rangle$ および Fock 空間を含め、各々独立な演算子とみなせる。そこで、(5.3) に従い、正準量 $\hat{q}^i(\xi_*^i), \hat{p}^i(\xi_*^i)$ を導入する。

$$\hat{q}^i(\xi_*^i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\chi}^i(\xi_*^i) + \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i) \right), \quad \hat{p}^i(\xi_*^i) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\hat{\chi}^i(\xi_*^i) - \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i) \right) \quad (5.59)$$

$$[\hat{q}^i(\xi_*^i), \hat{p}^j(\xi_*^j)] = i\delta_{ij}\delta(\xi_*^i - \xi_*^j) \quad [\hat{q}^i(\xi_*^i), \hat{q}^j(\xi_*^j)] = [\hat{p}^i(\xi_*^i), \hat{p}^j(\xi_*^j)] = 0 \quad (5.60)$$

この正準量に対し、ネガティビティ $\Xi(\hat{\rho})$ を計算する。密度演算子 $\hat{\rho}$ を定義する状態ベクトルとして Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ を取る。

$$\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0| \quad (5.61)$$

(5.56) より何次のモーメント（真空期待値）でも $F(\xi_*^L, \xi_*^R)$ で形式的ではあるが書けるので、 $|0\rangle$ を Gauss 状態としてまず形式的に扱う。(5.11)、(5.12)、(5.13)、(5.14) の性質をみるため、各成分を調べる。

まず、 $\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{q}^R(\xi_*^R)$ の真空期待値を

$$I(\xi_*^L, \xi_*^R) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}(\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{q}^R(\xi_*^R)\hat{\rho}) = \langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{q}^R(\xi_*^R)|0\rangle \quad (5.62)$$

と書く。左右領域の粒子数は同じであること利用し

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{q}^R(\xi_*^R)|0\rangle &= \frac{1}{2}\langle 0|(\hat{\chi}^L(\xi_*^L) + \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_*^L))(\hat{\chi}^R(\xi_*^R) + \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_*^R))|0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle 0|\hat{\chi}^L(\xi_*^L)\hat{\chi}^R(\xi_*^R) + \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_*^L)\hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_*^R)|0\rangle \end{aligned} \quad (5.63)$$

と変形する。すると、同じ理由によって

$$\langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{q}^R(\xi_*^R)|0\rangle = -\langle 0|\hat{p}^L(\xi_*^L)\hat{p}^R(\xi_*^R)|0\rangle \quad (5.64)$$

という関係を得る。

$\langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{p}^R(\xi_*^R)|0\rangle$ も同様に変形する。

$$\langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{p}^R(\xi_*^R)|0\rangle = -\frac{i}{2}\langle 0|\hat{\chi}^L(\xi_*^L)\hat{\chi}^R(\xi_*^R) - \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_*^L)\hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_*^R)|0\rangle \quad (5.65)$$

Bogoliubov 係数を使い

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{p}^R(\xi_*^R)|0\rangle &= -\frac{i}{2} \int_0^\infty d\rho d\rho' \int_{-\infty}^\infty dk \frac{2\sqrt{\rho\rho'} \sinh \pi\rho \sinh \pi\rho'}{\pi^2} K_{i\rho}(m\xi_*^L) K_{i\rho'}(m\xi_*^R) \\ &\quad \times (\alpha_{k\rho}^{L*} \beta_{k\rho'}^{R*} - \beta_{k\rho}^L \alpha_{k\rho'}^R) \end{aligned} \quad (5.66)$$

と書き換え、関係式 $\alpha_{k\rho}^L = \alpha_{k\rho}^{R*}$, $\beta_{k\rho}^L = \beta_{k\rho}^{R*}$ を代入すると

$$\langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{p}^R(\xi_*^R)|0\rangle = 0 \quad (5.67)$$

を得る。

同じ側にある正準量の期待値は、 $|0\rangle$ には左右同数の粒子が存在するので、

$$\langle 0|\hat{q}^i(\xi_*^i)|0\rangle = \langle 0|\hat{p}^i(\xi_*^i)|0\rangle = 0 \quad (5.68)$$

を得る。また、 $\langle 0|\hat{q}^i(\xi_*^i)\hat{p}^i(\xi_*^i)|0\rangle$ については対称積を取ると

$$\langle 0|\frac{1}{2}(\hat{q}^i(\xi_*^i)\hat{p}^i(\xi_*^i) + \hat{p}^i(\xi_*^i)\hat{q}^i(\xi_*^i))|0\rangle = 0 \quad (5.69)$$

となる。

同じ側の2つ以上の正準量の期待値には同点の処理の問題を含む。これは無限自由度を扱う場の量子論では必ず現れる問題で、調和振動子との対応で扱う際、議論が形式的になる理由である。そこで、同点を適当に処理（繰り込み）する。

$$\langle 0|\hat{q}^i(\xi_*^i)\hat{q}^i(\xi_*^i)|0\rangle = \langle 0|\hat{p}^i(\xi_*^i)\hat{p}^i(\xi_*^i)|0\rangle = A_i(\xi_*^i) \quad (5.70)$$

これらの結果を (5.11)(5.12)(5.13)(5.14) に代入する。

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_L & 0 \\ 0 & A_L \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A_R & 0 \\ 0 & A_R \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} I(\xi_*^L, \xi_*^R) & 0 \\ 0 & -I(\xi_*^L, \xi_*^R) \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \begin{pmatrix} I(\xi_*^L, \xi_*^R) & 0 \\ 0 & -I(\xi_*^L, \xi_*^R) \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

$$\Delta(M) = A_L^2 A_R^2 + I(\xi_*^L, \xi_*^R)^4 - 2A_L A_R I(\xi_*^L, \xi_*^R)^2 \quad (5.73)$$

$$\tilde{\Delta}(M) = A_L^2 + A_R^2 + 2I(\xi_*^L, \xi_*^R)^2 \quad (5.74)$$

これらをネガティビティの公式 (5.15)

$$\Xi(\hat{\rho}_{12}) = \max \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\Delta}(M) - \sqrt{\tilde{\Delta}(M)^2 - 4\Delta(M)}}} - \frac{1}{2}, 0 \right)$$

に代入する。

A_i については、各領域について独立に扱えること。そして、次節で計算される粒子分布などから、原点近傍に於いては定数として扱えるであろうことから、以後、具体的には相関 $I(\xi_*^L, \xi_*^R)$ の振る舞いを調べる。もし、この相関がゼロになれば、ネガティビティは

$$\Xi(\hat{\rho}_{12}) = \max \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{A_L^2 + A_R^2}} - \frac{1}{2}, 0 \right) \quad (5.75)$$

となり各領域は独立な扱いとなるので、量子纏れはないと結論出来る。

$I(\xi_*^L, \xi_*^R)$ を具体的に計算し、

$$I(\xi_*^L, \xi_*^R) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\rho d\rho' \int_{-\infty}^\infty dk \frac{2\sqrt{\rho\rho'} \sinh \pi\rho \sinh \pi\rho'}{\pi^2} K_{i\rho}(m\xi_*^L) K_{i\rho'}(m\xi_*^R) \\ \times (\alpha_{k\rho}^{L*} \beta_{k\rho'}^{R*} + \beta_{k\rho}^L \alpha_{k\rho'}^R) \quad (5.76)$$

に

$$\alpha_{k\rho}^R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_k(1 - e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k - k}{m} \right)^{i\rho} \\ \alpha_{k\rho}^L = \alpha_{k\rho}^{R*} \quad \beta_{k\rho}^R = e^{-\pi\rho} \alpha_{k\rho}^R \quad \beta_{k\rho}^L = \beta_{k\rho}^{R*}$$

を代入する。そして、この積分を実行する。変数変換 $k = m \sinh \theta$ を行い、 k 積分を実行した結果は、

$$\langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{q}^R(\xi_*^R)|0\rangle = \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{\pi^2} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^R}) K_{i\rho}(m e^{\xi_*^L}) \quad (5.77)$$

である。これを数値積分した結果が図 5.5 である。実際の計算には $m\alpha = 1$ を採用した。

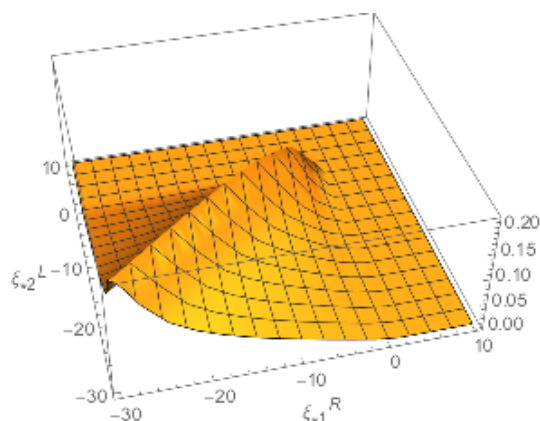


図 5.5 $\langle 0 | \hat{q}^L(\xi_*^L) \hat{q}^R(\xi_*^R) | 0 \rangle$

$F(\xi_*^L, \xi_*^R)$ の振る舞い (図 5.1、図 5.2) と比較すると、ピークの幅は広がるが、原点から離れると急激に減少する様子は同じである。幅が広がったため、数値積分の収束性は良くなり、技術的な収束因子の導入は避けられた。

(図 5.5) により、原点からの距離が同じようなところの状態が強く量子纏れし、原点から離れると急速に量子纏れの程度が弱まる様子が良く分かる。次の小節の結果との比較のため強調する点がある。原点からの距離でピークの減少を見ると、近似的に量子纏れが解けたとみなせる ($I(\xi_*^R, \xi_*^L) \sim 0$) 点は $\xi_*^R = \xi_*^L = 0$ 付近である。

5.4.2 平行移動と量子纏れ

節 3.2 で説明したように、Rindler 系に於いては原点からの距離を決めれば固有加速度も決まる。しかし、Minkowski 系では位置と固有加速度とは独立なものである。この自由度の違いは、Rindler 系の原点を Minkowski 系のどの点に対応させるかの違いに起因する。そこで、この違いに注目して解析を進める。

並進不変性

Minkowski 系の原点を l だけ右に平行移動する。この移動に対し、Klein-Gordon 方程式の解

$$u_k(x) = \frac{e^{-i\omega_k t + ikx}}{\sqrt{(2\pi)2\omega_k}}, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (5.78)$$

は

$$u_k(x) = \frac{e^{-i\omega_k t + ikx - ikl}}{\sqrt{(2\pi)2\omega_k}} \quad (5.79)$$

と位相だけずれる。Rindler 系の原点を、 l ずらした Minkowski 系の原点に合わせれば、Bogoliubov 係数は

$$\beta_{k\rho'}^{i*} = e^{-ikl} \beta_{k\rho'}^{i*}, \quad \alpha_{k\rho'}^i = e^{-ikl} \alpha_{k\rho'}^i, \quad i = R, L \quad (5.80)$$

と位相だけずれる。一方、Minkowski 系の真空を Rindler 系の粒子描像で構成すると

$$|0\rangle = N \exp\left(\int d\rho d\nu \hat{a}(\nu)^{R\dagger} V_{\nu\rho}^{RL} \hat{a}^{L\dagger}(\rho)\right) |\bar{0}\rangle$$

$$V_{\nu\rho}^{RL} = \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha^{-1})_{\nu k}^R \beta_{k\rho}^{L*} = \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha'^{-1})_{\nu k}^R \beta'_{k\rho}{}^{L*} \quad (5.81)$$

であった。(5.81) から分かるように位相のずれは相殺している。本来 Rindler 空間には平行移動という操作がないことを考慮すると、(5.80) と (5.81) は、Minkowski 系の真空が並進対称性を持つことを示している。

原点の相違と量子纏れ

左にいる観測者と右にいる観測者は、Minkowski 系の異なった点に原点を対応させた Rindler 系を各々用意することが出来る。右側領域にいる観測者が l だけ平行移動した点を原点とした場合を図 5.6 で示した。

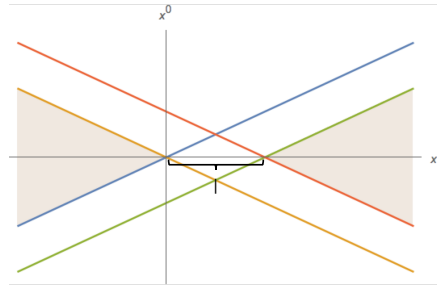


図 5.6. Rindler 空間の原点と Minkowski 空間の点との対応が異なる 2 つの系。薄紫の部分は相互に独立な領域。

図 5.6 から分かるように、左 Rindler wedge の左側の粒子描像と右 Rindler wedge の右側の粒子描像は独立である。しかし、右 Rindler wedge の左側の粒子描像は左 Rindler wedge の右側の粒子描像とは独立でない。そこで、独立な領域における粒子描像の状態でも Minkowski 系の真空という合成された状態に於いては量子纏れを生じるはずである。しかし、この量子纏れを第 5.3 節で調べたような方法で直接みることは難しい。

そこで、Minkowski 系の真空の並進対称性を利用し、Minkowski 系の粒子描像による表現を取るにあたり、左 Rindler 空間の左側の粒子描像は (5.78) と対応させ、右 Rindler の右側の粒子描像は (5.79) を対応させる。これにより、Bogoliubov 係数は位相だけ異なるもの (5.80) を使うこととなる。各量の定義は

$$\hat{q}^R(\xi_*^R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\chi}^R(\xi^R) + \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi^R)), \quad \hat{p}^R(\xi^R) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{\chi}^R(\xi^R) - \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi^R)) \quad (5.82)$$

$$\hat{\chi}^{R\dagger}(\xi^R) = \int \int \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} K_{-i\rho}(m\xi^R) (\beta'_{k\rho}{}^R \hat{a}(k) + \alpha'_{k\rho}{}^R \hat{a}^\dagger(k)) dpdk \quad (5.83)$$

$$\hat{\chi}^R(\xi^R) = \int \int \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} K_{i\rho}(m\xi^R) (\alpha'_{k\rho}{}^{R*} \hat{a}(k) + \beta'_{k\rho}{}^{R*} \hat{a}^\dagger(k)) dpdk \quad (5.84)$$

である。これにより、

$$I(\xi_*^L, \xi_*^R; l) = \langle 0 | \hat{q}^L(\xi_*^L) \hat{q}^R(\xi_*^R) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\rho d\rho' \int_{-\infty}^\infty dk \frac{2\sqrt{\rho\rho'} \sinh \pi\rho \sinh \pi\rho'}{\pi^2} \\ \times K_{i\rho}(m\xi^L) K_{i\rho'}(m\xi^R) (\alpha_{k\rho}^{L*} \beta_{k\rho'}^{R*} + \beta_{k\rho}^L \alpha_{k\rho'}^R) \quad (5.85)$$

を計算する。\$k\$ 積分を行うにあたり、変数変換 \$k = m \sinh \theta\$ を行う。

$$I(\xi_*^L, \xi_*^R; l) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\rho d\rho' \frac{2\sqrt{\rho\rho'} \sinh \pi\rho \sinh \pi\rho'}{\pi^2} \frac{K_{i\rho}(m\xi^L) K_{i\rho'}(m\xi^R)}{\sqrt{(1 - e^{-2\pi\rho_1})(1 - e^{-2\pi\rho_2})}} \\ \times \int_{-\infty}^\infty \frac{d\theta}{2\pi} (e^{-\pi\rho_1} e^{i(\rho_1 - \rho_2)\theta} + e^{-\pi\rho_2} e^{-i(\rho_1 - \rho_2)\theta}) e^{-iml \sinh \theta} \quad (5.86)$$

次に、変形第 2 種 Bessel 関数の積分表示

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} e^{\pm \frac{i\pi}{2}\nu} \int_{-\infty}^\infty dt e^{-ix \sinh t \pm \nu t} \quad (|\Re \nu| < 1, x > 0) \\ 2e^{-\frac{i\pi}{2}\nu} K_\nu(x) = \int_{-\infty}^\infty dt e^{ix \sinh t + \nu t} \quad (5.87)$$

を用いると

$$I(\xi_*^L, \xi_*^R; l) = \frac{2}{\pi^3} \int_{-\infty}^\infty d\rho_1 d\rho_2 \sqrt{\rho_1 \rho_2} \cosh \pi(\rho_1 - \rho_2) K_{i\rho_1}(m\xi^L) K_{i\rho_2}(m\xi^R) K_{i(\rho_1 - \rho_2)}(ml) \quad (5.88)$$

となる。

右側領域の観測者が Rindler 系の原点近傍で加速度運動する場合を考える。すなわち非常に大きい固有加速度を持つ。そのとき、近傍 \$\xi^R \sim 0\$ となるので、変形第 2 種 Bessel 関数の性質より、\$K_{i\rho_2}(m\xi^R)\$ は \$\rho_2 \sim 0\$ 近傍でのみ値を持つ。そこで、(5.88) は

$$I(\xi_*^L; l_*) = \langle 0 | \hat{q}^L(\xi_*^L) \hat{q}^R(\xi_*^R) | 0 \rangle \sim \\ \frac{2}{\pi^3} K_0(m\alpha e^{\xi_*^R}) \int_0^\infty d\rho \sqrt{\rho} \cosh \pi\rho K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^L}) K_{i\rho}(m\alpha e^{l_*}) \quad (5.89)$$

と近似できる。この近似のもと、\$(l_*, \xi_*^L)\$ との相対的相関を見る。\$l_*\$ は \$l_* = \log \frac{l}{\alpha}\$ である。この数値積分は図 5.7 となる。ただし、\$m = 1, \alpha = 1\$ を取った。

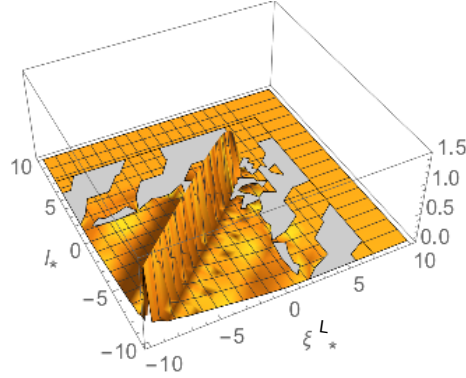


図 5.7 $I(\xi_*^L; l_*) = \langle 0 | \hat{q}^L(\xi_*^L) \hat{q}^R(\xi_*^R) | 0 \rangle$ ξ_*^R は原点近傍 ($\xi_*^R \sim 0$)

この結果は近似的なものではある。第 5.4.1 節で調べた $\langle 0 | \hat{q}^L(\xi_*^L) \hat{q}^R(\xi_*^R) | 0 \rangle$ における ξ_*^R を l_* と対応させることにより、 $\langle 0 | \hat{q}^L(\xi_*^L) \hat{q}^R(\xi_*^R) | 0 \rangle$ と比較すると、ほぼ同じ傾向であることが分かる。しかし、 $\langle 0 | \hat{q}^L(\xi_*^L) \hat{q}^R(\xi_*^R) | 0 \rangle$ との違いは、 $(\xi_*^R = 0, l_* = 0)$ を超え相関が残る点である。独立な粒子描像を採用しているため、この違いは量子纏れが長距離に及んでいることを示している。物理的には、粒子描像は異なり、右側では非常に大きな固有加速度を持っている。この点の反映であるか、 (ξ_*^R, ξ_*^L, l_*) の相関図を調べる必要がある。

5.5 参照基準系と量子纏れ

第 5.3 節 および第 5.4 節では、Rindler 系を設定し、そこでの基本的粒子描像を使い、Minkowski 系の大局的に定義された真空 $|0\rangle$ の量子纏れの状況を調べた。まず、 ξ_*^L, ξ_*^R を固定し、そこでの基本的粒子描像 ($\hat{\chi}^i(\xi_*^i), \hat{\chi}^{i\dagger}(\xi_*^i)$, $i = L, R$) が張る二つの Fock 空間のうち、各々別の Fock 空間に属する 2 つの状態ベクトル同士の量子纏れの様子を調べる。注目した自由度以外は跡を取り消去する際、注目した自由度の状態は混合状態になる。そのため、量子纏れの基準を混合状態に拡張し、その基準を表すのにネガティビティ(5.7)を導入する。そして、この基準は正準量 (5.59) の相関

$$\langle 0 | \hat{q}^L(\xi_*^L) \hat{q}^R(\xi_*^R) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{\chi}^L(\xi_*^L) \hat{\chi}^R(\xi_*^R) + \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_*^L) \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_*^R) | 0 \rangle \quad (5.90)$$

に帰着できる。しかし、正準量は場の量として理論にはない。そこで、場の量として相関 (5.62) を再考する。

Unruh 効果は、場の理論としては、Wightman 関数の表現とその解釈の変更にすぎない [10]。これに物理的意味を与えるのは座標系の選択と局在的観測との関係である。古典的な意味では、観測装置が等速運動しているのか、加速運動しているのかといった状況に対し座標系は設定される。そこで、観測装置を設置する座標系を参照基準系と呼ぶ。真空 $|0\rangle$ の量子纏れの空間的構造を調べるのに、一つの空間的超平面上の離れた二つの粒子描像に

注目する。すなわち因果関係のない独立な二つの観測が前提となり、参照基準系は独立に二つ選ぶ。一方、量子場 $\hat{\phi}(x)$ の粒子描像による展開は座標系ごとに決まるが、量子場の真空期待値としての Wightman 関数は同じで、表現する変数が変わるだけである [28]。そこで、この Wightman 関数から物理的に興味のある部分、即ちこの節では正準量の相関を観測装置により抜き出し、物理的意味を与えることが重要である。

そこで、観測装置を導入するが、基本的粒子を検出するものを想定し検出器と呼ぶ。参照基準系を決める検出器系（観測装置）を説明する。第 5.3 節、第 5.4 節で議論の対象としてきた場を対象場 $\hat{\phi}(x)$ と呼び導入する。その他に、直接観測する場を検出器場 $\hat{\phi}_i^d(x)$ ($i = L, R$) と呼び、原点に対し左側と右側に対応させるため独立に 2 つ導入する。ただし、検出器場は対象場同様全空間に対し定義された普通場である。検出器場 $\hat{\phi}_i^d(x)$ と対象場 $\hat{\phi}(x)$ とは、共変的な相互作用項 (\hat{V}_i) を通し結合する。

$$\hat{V}_i = \int_{-\infty}^{\infty} dx : \hat{\phi}_i^d(x) \hat{\phi}_i^d(x) : \hat{\phi}(x) \quad (5.91)$$

積分 $\int dx$ は超平面 Σ 上である。ここでの正規積 $: \dots :$ は後ほど説明する。また、 \hat{V}_i は観測量としての資格がある。

密度演算子 $\hat{\rho}_{LR}$ を

$$|\psi_{LR}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |0\rangle \otimes |x_*^L\rangle^{dL} \otimes |x_*^R\rangle^{dR}, \quad \hat{\rho}_{LR} \stackrel{\text{def}}{=} |\psi_{LR}\rangle \langle \psi_{LR}| \quad (5.92)$$

と導入し、 $I(\xi_*^L, \xi_*^R)$ に対応した相関関数 $\mathcal{I}(x_*^L, x_*^R)$ を

$$\mathcal{I}(x_*^L, x_*^R) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}(\hat{V}_L \hat{V}_R \hat{\rho}_{LR}) \quad (5.93)$$

と定義する。状態ベクトル $|x_*^R\rangle^{dR}$, $|x_*^L\rangle^{dL}$ は Minkowski 系での Newton-Wigner 粒子の位置を表す状態ベクトルか、Rindler 系で局在化した粒子の位置を表す状態ベクトルか選択できる。

観測者が準備できるのは密度演算子 $\hat{\rho}_{LR}$ である。対象場 $\hat{\phi}(x)$ の状態は Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ である。この状態 $|0\rangle$ の観測者の状況による見え方の変化を調べ、物理的意味のある量を取り出すのが目的である。

検出器場 $\hat{\phi}_i^d(x)$ は独立な 2 つの場を想定しているので、これら場の状態ベクトル $|x_*^L\rangle^{dL}$, $|x_*^R\rangle^{dR}$ は Minkowski 系であったり、Rindler 系であったりその都度独立に選ぶことが出来る。そこで、発散を処理する正規積 ($: \dots :$) も変わる。直接制御するのはこの検出器場の状態である。観測者は等固有加速度運動しているときは Rindler 系に、等速運動しているときは Minkowski 系を採用する。そのイメージ図は図 5.8 である。

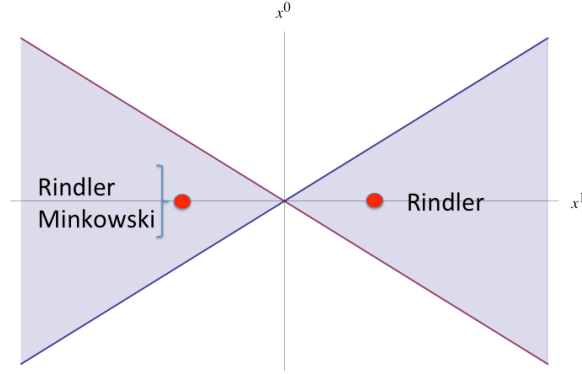


図 5.8. 左右領域に 1 つずつ独立な検出器を持ち込み、相関を調べることにより Minkowski 系の真空の構造をみる。赤点は $|x_*^L\rangle^{d_L}$, $|x_*^R\rangle^{d_R}$ で指定する場所。

5.5.1 Minkowski 系—Minkowski 系

Minkowski 系—Minkowski 系の場合は、検出器場の状態は Newton-Wigner 粒子の局所状態 $|x\rangle^{d_R}$, $|x'\rangle^{d_L}$ を準備する。Minkowski 系なので、検出器場の正規積は通常のもを採用する。そこで、検出器場に関する期待値は

$$h^d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} {}^{d_R}\langle x | : \hat{\phi}_R^d(y) \hat{\phi}_R^d(y) : |x\rangle^{d_R} \quad (5.94)$$

である。図の説明のため

$$\hat{m}_i^d(x) \stackrel{\text{def}}{=} : \hat{\phi}_i^d(x) \hat{\phi}_i^d(x) : \quad (5.95)$$

と略記する。

具体的に計算を実行すると、

$$\begin{aligned} h^d(x, y) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 dk_2 {}^d \langle x | a_{k_1}^\dagger u_{k_1}^*(y) a_{k_2} u_{k_2}(y) |x\rangle^d \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 dy_2 D_{k_1}^*(y, y_1) D_{k_2}(y, y_2) \\ &\quad \times {}^d \langle x | \chi^\dagger(y_1) \chi(y_2) |x\rangle^d \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 dk_2 D_{k_1}^*(y, x) D_{k_2}(y, x) \\ &= 2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{i(x-y)k}}{2\pi\sqrt{2\omega_k}} \right|^2 \\ &= 2 \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dk \frac{\cos|x-y|k}{(k^2 + m^2)^{\frac{1}{4}}} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.96)$$

となる。ただし、

$$D_k(x, y) = \frac{e^{ik(y-x)}}{\sqrt{(2\pi)^2 2\omega_k}}, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (5.97)$$

である。 $\text{Re } \nu > -1$, $\text{Re } z > 0$ として、変形第 2 種 Bessel 関数の積分表示 [40][43]

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dk \frac{\cos t}{(k^2 + z^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dk \frac{\cos |r|k}{(k^2 + m^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{m^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{4}}(m|r|)}{(2|r|)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \quad (5.98)$$

から²

$$h^d(x, y) = 2 \left| \frac{m^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{4}}(m|x-y|)}{(2|x-y|)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \right|^2 \quad (5.99)$$

と求まる。(5.99) を図示したものは図 5.9 である。変数 x に関し右側領域は $x > 0$ である。同様に左側領域は $x < 0$ である。

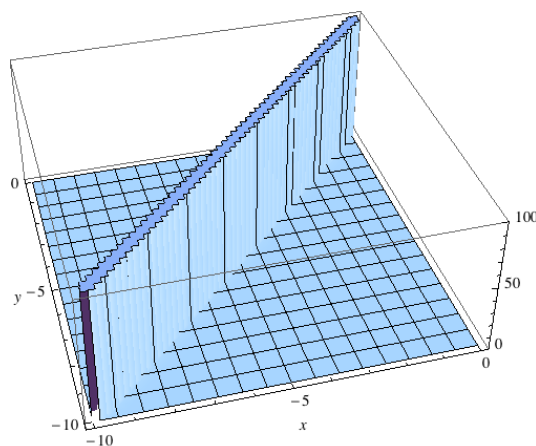


図 5.9 参照基準系を Minkowski 系とした場合の検出器系の $\hat{m}_i^d(y)$ の期待値 $h^d(x, y)$ 。

図 5.9 より分かるように、 $x \sim y$ で非常に大きな値を持つ。そこで、(5.91) の積分は、値 x のところで置き換える近似が可能である。また、 $x \sim y$ のピークは減少することなく続く。これらの性質は検出器として十分なものである。

そこで、対象場の Minkowski 系における Wightman 関数を通して、位置相関を調べることにする。このとき、対象系に現れる Wightman 関数は

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk u_k(x) u_k^*(y) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{4\pi\omega_k} e^{i(x-y)k} \\ = \frac{1}{2\pi} K_0(mr) \quad (r = |x-y|) \quad (5.100)$$

である。そこで、相関は

$$\mathcal{I}(x, y) \propto \frac{1}{2\pi} K_0(mr) \quad (r = |x-y|) \quad (5.101)$$

² $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ $\nu \neq$ (整数) を使用。

となるので、 $\mathcal{I}(x, y)$ に、左右領域で同じ距離にあるとき大きな値を持つといったような相関は見られない。また、左右独立な粒子画像を使用していないので量子纏れとは関係のない量となっている。

5.5.2 Minkowski 系— Rindler 系

左側領域の観測者が Minkowski 系、右側領域の観測者が Rindler 系にいる場合を考える。観測者が用意できる状態は、対象場の Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ 、Minkowski 系の Newton-Wigner 粒子が位置 x に局在化した状態 $|x\rangle^{d_L}$ 、Rindler 系での粒子の局在化状態 $|\xi_*^R\rangle^{d_R}$ である。観測者の立ち位置で相互作用項の展開は決まる。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\xi_*^R, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{*1}^R dy^{d_R} \langle \xi_*^R | : \hat{\phi}_R^d(\xi_{*1}^R) \hat{\phi}_R^d(\xi_{*1}^R) : | \xi_*^R \rangle^{d_R} \times {}^{d_L} \langle x | : \hat{\phi}_L^d(y) \hat{\phi}_L^d(y) : | x \rangle^{d_L} \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(\xi_{*1}^R) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.102)$$

検出器系と対象系に分けて計算する。まず、Rindler 系の検出器系を $h^d(\xi_*^R, \xi_{*1}^R)$ と記して、具体的計算をすると

$$\begin{aligned} h^d(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) &= 2 \int_0^{\infty} d\rho_1 d\rho_2 {}^{d_R} \langle \xi_*^R | \hat{a}^{R\dagger}(\rho_1) u_{\rho_1}^{R*}(\xi_*^R) \hat{a}^R(\rho_2) \bar{u}_{\rho_2}^R(\xi_*^R) | \xi_*^R \rangle^{d_R} \\ &= 2 \int_0^{\infty} d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R {}^{d_R} \langle \xi_*^R | \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_{*1}^R) \hat{\chi}^R(\xi_{*2}^R) | \xi_*^R \rangle^{d_R} \\ &\quad \times D_{\rho_1}^*(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) D_{\rho_2}(\xi_*^R, \xi_{*2}^R) \\ &= 2 \int_0^{\infty} d\rho_1 d\rho_2 D_{\rho_1}^*(\xi_*^R, \xi_*^R) D_{\rho_2}(\xi_*^R, \xi_*^R) \end{aligned} \quad (5.103)$$

となる。(5.103) の数値的結果³は図 5.10 となる。

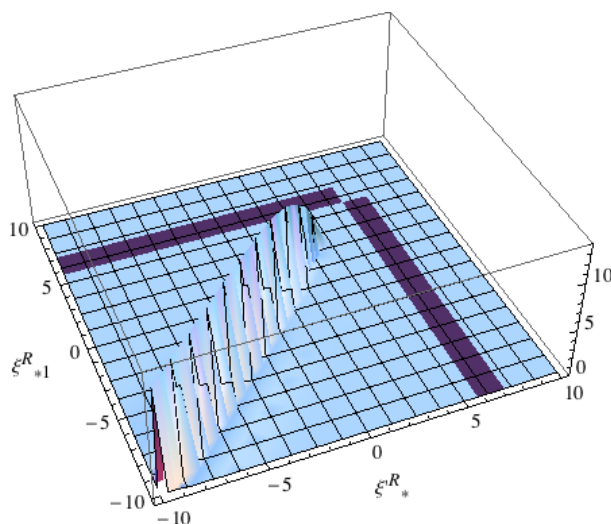


図 5.10. 参照基準系を Rindler 系とした場合の検出器系の $\hat{m}_R(\xi_{*1}^R)$ の期待値 $h^d(\xi_*^R, \xi_{*1}^R)$ 。

³ $\beta = m = \alpha = 1$

図 5.10 から $\xi_*^R \sim \xi_*^{R*}$ で期待値は大きな値を持つことが分かる。そこで、 ξ_*^R を決めると ξ_{*1}^R が決まる。また、原点から離れるある点まで一定値であるが、その先急激に減少する。しかし、相関関数の場合と違い、0 点を越え遠くまで値を持つ。相関関数を調べるには十分な性質である。

次に、Minkowski 系の検出器系を $h^d(x, y)$ 書き、既に計算した結果を示すと

$$\begin{aligned} h^d(x, y) &= {}^{dL}\langle x | : \hat{\phi}_L^d(y) \phi_L^d(y) : | x \rangle^{dL} \\ &= 2 \left| \frac{m^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{4}}(m|x-y|)}{(2|x-y|)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4})} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.104)$$

である。このとき、観測者が左側領域にいるので、 $x < 0$ となることに注意する。 $h^d(x, y)$ を図示したのが図 5.9 である。すでに述べたように、相関を調べるのに十分な性質を持つ。

続いて、対象系の部分を計算する。検出器の部分の最大値を持つ近傍で積分を置き換える近似を取る。そこで、

$$h^\phi(\xi_{*1}^R, y) \stackrel{\text{def}}{=} \langle 0 | \hat{\phi}(\xi_{*1}^R) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle \quad (5.105)$$

とすると、相関は

$$\mathcal{I}(\xi_{*1}^R, y) \propto h^\phi(\xi_{*1}^R, y) \quad (5.106)$$

と近似できる。 $\hat{\phi}(\xi_{*1}^R)$ は Rindler 系の右側領域の解で展開する。検出器用に用意した状態のため、左側領域の解は拾えない。その後、Minkowski 系へ Bogoliubov 変換をする。 $\hat{\phi}(y)$ は Minkowski 系の解で展開する。そのため、全領域に及ぶものである。しかし、主要部は左側領域からの寄与である。必要となる Bogoliubov 変換式は

$$\bar{a}_\rho^R = \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha_{k\rho}^{R*} a_k + \beta_{k\rho}^{R*} a_k^\dagger) \quad \bar{a}_\rho^{R\dagger} = \int_{-\infty}^{\infty} dk (\beta_{k\rho}^R a_k + \alpha_{k\rho}^R a_k^\dagger) \quad (5.107)$$

$$\alpha_{k\rho}^R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_k(1-e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k - k}{m} \right)^{i\rho} \quad \beta_{k\rho}^R = e^{-\pi\rho} \alpha_{k\rho}^R \quad (5.108)$$

であり、 $h^\phi(\xi_{*1}^R, y)$ は

$$\begin{aligned} h^\phi(\xi_{*1}^R, y) &= \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty dk \, dk_1 \langle 0 | (\bar{u}_\rho^R(\xi_{*1}^R) \alpha_{k_1\rho}^{R*} a_{k_1} + \bar{u}_\rho^{R*}(\xi_{*1}^R) \beta_{k_1\rho}^R a_{k_1}) a_k^\dagger u_k(y) | 0 \rangle \\ &= \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty dk \, u_k(y) (\bar{u}_\rho^R(\xi_{*1}^R) \alpha_{k\rho}^{R*} + \bar{u}_\rho^{R*}(\xi_{*1}^R) \beta_{k\rho}^R) \end{aligned} \quad (5.109)$$

となる。1 と 2 項目に分けて計算するので

$$h_1^\phi(\xi_{*1}^R, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty dk \, u_k(y) \bar{u}_\rho^R(\xi_{*1}^R) \alpha_{k\rho}^{R*} \quad (5.110)$$

$$h_2^\phi(\xi_{*1}^R, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\rho \int_{-\infty}^\infty dk \, u_k(y) \bar{u}_\rho^{R*}(\xi_{*1}^R) \beta_{k\rho}^R \quad (5.111)$$

と定義する。まず、 $k = m \sinh \theta$ と変数変換し、変形第 2 種 Bessel 関数の積分表示

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{i(my \sinh \theta + \rho\theta)} = 2e^{-\frac{\pi\rho}{2}} K_{i\rho}(my) \quad (5.112)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{i(-my \sinh \theta + \rho\theta)} = 2e^{\frac{\pi\rho}{2}} K_{i\rho}(my) \quad (5.113)$$

を用いる。今、Minkowski 系の検出器を左側領域に置いているので $y < 0$ となる。そこで $-|y|$ として計算すると

$$h_1^\phi(\xi_{*1}^R, y) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \int_0^\infty d\rho e^{\pi\rho} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_{*1}^R}) K_{i\rho}(m|y|) \quad (5.114)$$

$$h_2^\phi(\xi_{*1}^R, y) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \int_0^\infty d\rho e^{-\pi\rho} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_{*1}^R}) K_{i\rho}(m|y|) \quad (5.115)$$

となる。左右領域共に Rindler 系の検出器を用いた場合と比較するため、 y を ξ_* 変数表示にかえ $|y| = \alpha e^{y_*}$ とする。すると $h^\phi(\xi_{*1}^R, y_*)$ は

$$\begin{aligned} h^\phi(\xi_{*1}^R, y_*) &= h_1^\phi(\xi_{*1}^R, y_*) + h_2^\phi(\xi_{*1}^R, y_*) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_{*1}^R}) K_{i\rho}(m\alpha e^{y_*}) \cosh \pi\rho \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} K_0(m\alpha |e^{\xi_{*1}^R} - e^{y_*}|) \end{aligned} \quad (5.116)$$

となる。この数値的結果は図 5.11 である。

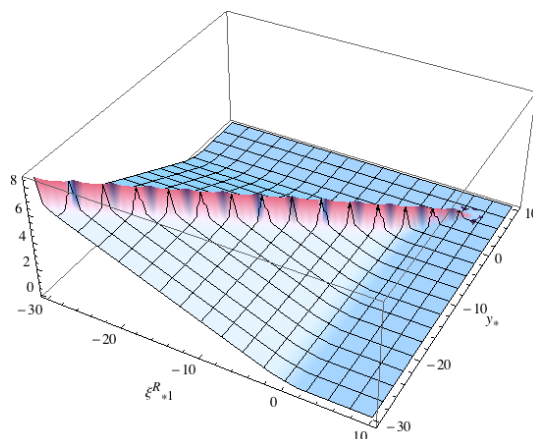


図 5.11. 参照基準系として Minkowski 系-Rindler 系を取った場合の対象系の相関 $h^\phi(\xi_{*1}^R, y_*) (\propto \mathcal{I}(\xi_{*1}^R, y))$ 。

図 5.11 から、なだらかながらも $\xi_{*1}^R \sim y_*$ にピークを持つことが分かる。この相関を以って、量子纏れがあったと結論できない。なぜなら、構成要素である各粒子描像は独立ではない。詳細は小節 5.5.4 で見る。この痕跡は、 $\xi_{*1}^R > 0$, $y_* > 0$ の領域にも相関が残ることに見て取れる。これは前節 5.4 での正準量間の相関にはない特徴である。

5.5.3 Rindler 系—Rindler 系

5.5.2 節の Minkowski 系での $|x\rangle^{d_R}$ を Rindler 系での $|\xi_*^R\rangle^{d_R}$ へ変更し

$$\mathcal{I}(\xi_*^R, \xi_*^L) = {}^{d_L}\langle \xi_*^L | \otimes {}^{d_R}\langle \xi_*^R | \otimes \langle 0 | \hat{V}_L \hat{V}_R | 0 \rangle \otimes |\xi_*^L\rangle^{d_L} \otimes |\xi_*^R\rangle^{d_R} \quad (5.117)$$

$$\hat{V} = \int_{-\infty}^{\infty} dx : \hat{\phi}_i^d(x) \hat{\phi}_i^d(x) : \hat{\phi}(x) \quad (5.118)$$

とする。まず、各項を分離して

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\xi_*^R, \xi_*^L) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^L d_L \langle \xi_*^L : \hat{\phi}_L^d(\xi_{*2}^L) \hat{\phi}_L^d(\xi_{*2}^L) : |\xi_*^L \rangle^{d_L} \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{\phi}(\xi_{*2}^L) \hat{\phi}(\xi_{*1}^R) | 0 \rangle \times {}^{d_R} \langle \xi_*^R | : \hat{\phi}_R^d(\xi_{*1}^R) \hat{\phi}_R^d(\xi_{*1}^R) : |\xi_*^R \rangle^{d_R} \end{aligned} \quad (5.119)$$

と書き、検出器系の部分を各々 $h^{dR}(\xi_*^R, \xi_{*1}^R)$, $h^{dL}(\xi_*^L, \xi_{*2}^L)$ と定義する。

$$h^{dR}(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi_*^R | : \phi^d(\xi_{*1}^R) \phi^d(\xi_{*1}^R) : |\xi_*^R \rangle \quad (5.120)$$

$$h^{dL}(\xi_*^L, \xi_{*2}^L) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi_*^L | : \phi^d(\xi_{*2}^L) \phi^d(\xi_{*2}^L) : |\xi_*^L \rangle \quad (5.121)$$

$h^{dR}(\xi_*^R, \xi_{*1}^R)$ はすでに計算済みで、結果は (5.103) で、数値計算した結果は図 5.10 である。
 $h^{dL}(\xi_*^L, \xi_{*2}^L)$ も同様にでき、結果は ξ_*^R を ξ_*^L に読み替えるだけで良い。

続いて、対象系を $h^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R)$ と定義する。

$$h^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R) \stackrel{\text{def}}{=} \langle 0 | \hat{\phi}(\xi_{*2}^L) \hat{\phi}(\xi_{*1}^R) | 0 \rangle \quad (5.122)$$

これにより、相関は

$$\mathcal{I}(\xi_*^R, \xi_*^L) \propto h^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R) \quad (5.123)$$

と近似できる。対象場は Rindler 系で展開する。その後、生成、消滅演算子に対し Bogoliubov 変換をし、Minkowski 系で扱う。必要となる Bogoliubov 変換式は

$$\bar{a}_\rho^{R(L)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha_{k\rho}^{R(L)*} a_k + \beta_{k\rho}^{R(L)*} a_k^\dagger) \quad (5.124)$$

$$\bar{a}_\rho^{R(L)\dagger} = \int_{-\infty}^{\infty} dk (\beta_{k\rho}^{R(L)} a_k + \alpha_{k\rho}^{R(L)} a_k^\dagger) \quad (5.125)$$

であり、 $h^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R)$ は

$$\begin{aligned} h^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R) &= \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 dk_2 \langle 0 | (\alpha_{k_2\rho_2}^{L*} a_{k_2} \bar{u}_{\rho_2}^L(\xi_{*2}^L) + \beta_{k_2\rho_2}^L a_{k_2} \bar{u}_{\rho_2}^{L*}(\xi_{*2}^L)) \\ &\quad \times (\beta_{k_1\rho_1}^{R*} a_{k_1}^\dagger \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_{*1}^R) + \alpha_{k_1\rho_1}^R a_{k_1}^\dagger \bar{u}_{\rho_1}^{R*}(\xi_{*1}^R)) | 0 \rangle \\ &= \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk (\alpha_{k\rho_2}^{L*} \beta_{k\rho_1}^{R*} \bar{u}_{\rho_2}^L(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_{*1}^R) + \alpha_{k\rho_2}^{L*} \alpha_{k\rho_1}^R \bar{u}_{\rho_2}^L(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_1}^{R*}(\xi_{*1}^R) \\ &\quad + \beta_{k\rho_2}^L \beta_{k\rho_1}^{R*} \bar{u}_{\rho_2}^{L*}(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_{*1}^R) + \beta_{k\rho_2}^L \alpha_{k\rho_1}^R \bar{u}_{\rho_2}^{L*}(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_1}^{R*}(\xi_{*1}^R)) \end{aligned} \quad (5.126)$$

となる。Bogoliubov 係数とこれが満たす関係式は

$$\alpha_{k\rho}^R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_k(1-e^{-2\pi\rho})}} \left(\frac{\omega_k - k}{m} \right)^{i\rho} \quad (5.127)$$

$$\alpha_{k\rho}^L = \alpha_{k\rho}^{R*} \quad \beta_{k\rho}^R = e^{-\pi\rho} \alpha_{k\rho}^R \quad \beta_{k\rho}^L = \beta_{k\rho}^{R*} \quad (5.128)$$

であり、この関係式から、(5.126) の 1 と 4 項目および 2 と 3 項目が等しい値を持つことが分かる。1 項目を $h_1^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R)$ と定義して計算すると

$$\begin{aligned} h_1^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^\infty dk \alpha_{k\rho_2}^{L*} \beta_{k\rho_1}^{R*} \bar{u}_{\rho_2}^L(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_{*1}^R) \\ &= \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \frac{e^{-\pi\rho} \sqrt{\sinh \pi\rho_1 \sinh \pi\rho_2}}{\pi^2 \sqrt{(1-e^{-2\pi\rho_1})(1-e^{-2\pi\rho_2})}} \\ &\quad \times K_{i\rho_1}(m\alpha e^{\xi_{*1}^R}) K_{i\rho_2}(m\alpha e^{\xi_{*2}^L}) \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi\omega_k} \left(\frac{\omega_k - k}{m}\right)^{-i(\rho_1 - \rho_2)} \end{aligned} \quad (5.129)$$

となる。変数変換 $k = m \sinh \theta$ を行い、 θ, ρ_2 積分を実行すると

$$h_1^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_{*1}^R}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_{*2}^L}) \quad (5.130)$$

となる。2 と 3 項目も同様に計算ができる。以上まとめると

$$h^\phi(\xi_{*2}^L, \xi_{*1}^R) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_{*1}^R}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_{*2}^L}) \quad (5.131)$$

となる。これを数値的に積分⁴した結果は図 5.12 である。

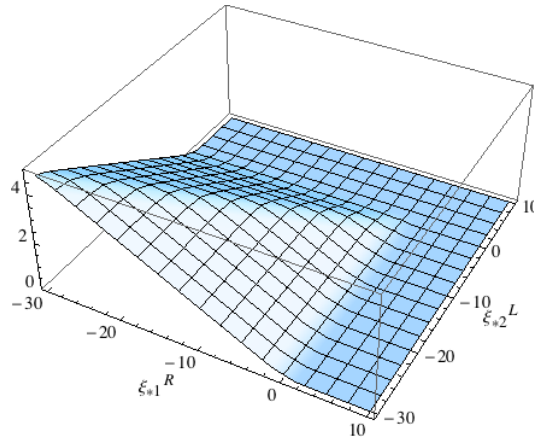


図 5.12. 参照基準系として Rindler 系-Rindler 系を取った場合の対象系の相関 $h^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L)$ ($\propto \mathcal{I}(\xi_*^R, \xi_*^L)$)。

図 5.11 と図 5.12 の比較から、Rindler 系の検出器場が左側領域又は右側領域の一方にあれば、相関を示すことが分かる。しかし、2つの場合の顕著な違いは相関が消える点である。Rindler 系-Rindler 系では $(\xi_*^R > 0, \xi_*^L > 0)$ の領域まで相関は延びていない。一方 Minkowski 系-Rindler 系では $(\xi_*^R > 0, y_* > 0)$ の領域まで相関は延びている。これは Minkowski 系での粒子描像の定義が大局的であることの痕跡である。詳細は次の小節 5.5.4 で見る。

⁴ $\beta = m = \alpha = 1$ 計算を行った。

5.5.4 基本的粒子描像での比較と量子縫れ

今までの議論では、場の定義などには Rindler 系での基本的粒子描像が使われている。しかし、定義された後は、構造を調べる対象が Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ であるため、数値計算上便利な Minkowski 系の粒子描像で計算している。そこで、Rindler 系の基本的粒子描像を使い各領域の寄与を明確にする必要がある。

そこで、基本的構成要素としてきた、Rindler 系の粒子描像で各相関の式を書き下すことにする。これにより、Rindler 系—Minkowski 系と Rindler 系—Rindler 系の違いが鮮明になる。

2つの検出器を用いた場合の比較の際用いた、(5.105) と (5.122) に注目し、Rindler 系の左右領域の基本的粒子描像で $\hat{a}^\dagger(k)$ を書き直す。 $\hat{a}^\dagger(k)$ は Rindler 系での粒子描像では

$$\hat{a}^\dagger(k) = \int_0^\infty d\rho (\hat{a}^{R\dagger}(\rho)\alpha_{k\rho}^{R*} + \hat{a}^{L\dagger}(\rho)\alpha_{k\rho}^{L*} - \hat{a}^R(\rho)\beta_{k\rho}^R - \hat{a}^L(\rho)\beta_{k\rho}^L) \quad (5.132)$$

となる。基本的粒子描像に変換すると

$$\hat{a}^R(\rho) = \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} \int_{-\infty}^\infty d\xi_*^R \hat{\chi}^R(\xi_*^R) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^R}) \quad (5.133)$$

$$\hat{a}^{R\dagger}(\rho) = \frac{\sqrt{2\rho \sinh \pi\rho}}{\pi} \int_{-\infty}^\infty d\xi_*^R \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_*^R) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*^R}) \quad (5.134)$$

である。

まず、(5.105) を取り上げ変換すと

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\xi_{*1}^R, y) &\propto h^\phi(\xi_{*1}^R, y) = \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^\infty dk u_k^*(y) \\ &\times \langle 0 | \left(\hat{a}^R(\rho_1) \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_{*1}^R) \hat{a}^{R\dagger}(\rho_2) \alpha_{k\rho_2}^{R*} - \hat{a}^R(\rho_1) \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_{*1}^R) \hat{a}^L(\rho_2) \beta_{k\rho_2}^L \right. \\ &\left. + \hat{a}^{R\dagger}(\rho_1) \bar{u}_{\rho_1}^{R*}(\xi_{*1}^R) \hat{a}^{L\dagger}(\rho_2) \alpha_{k\rho_2}^{L*} - \hat{a}^{R\dagger}(\rho_1) \bar{u}_{\rho_1}^{R*}(\xi_{*1}^R) \hat{a}^R(\rho_2) \beta_{k\rho_2}^R \right) |0\rangle \\ &= \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^\infty d\xi_{*2}^R \int_{-\infty}^\infty dk \frac{2\sqrt{\rho_1\rho_2 \sinh \pi\rho_1 \sinh \pi\rho_2}}{\pi^2} K_{i\rho_1}(m\alpha e^{\xi_{*2}^R}) u_k^*(y) \\ &\times \langle 0 | \left(\int_{-\infty}^\infty d\xi_{*3}^R \hat{\chi}^R(\xi_{*2}^R) \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_{*3}^R) \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_{*1}^R) \alpha_{k\rho_2}^{R*} K_{i\rho_2}(m\alpha e^{\xi_{*3}^R}) \right. \\ &- \int_{-\infty}^\infty d\xi_{*1}^L \hat{\chi}^R(\xi_{*2}^R) \hat{\chi}^L(\xi_{*1}^L) \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_{*1}^R) \beta_{k\rho_2}^L K_{i\rho_2}(m\alpha e^{\xi_{*1}^L}) \\ &+ \int_{-\infty}^\infty d\xi_{*1}^L \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_{*2}^R) \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_{*1}^L) \bar{u}_{\rho_1}^{R*}(\xi_{*1}^R) \alpha_{k\rho_2}^{L*} K_{i\rho_2}(m\alpha e^{\xi_{*1}^L}) \\ &\left. - \int_{-\infty}^\infty d\xi_{*3}^R \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_{*2}^R) \hat{\chi}^R(\xi_{*3}^R) \bar{u}_{\rho_1}^{R*}(\xi_{*1}^R) \beta_{k\rho_2}^R K_{i\rho_2}(m\alpha e^{\xi_{*3}^R}) \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (5.135)$$

となる。

続いて (5.122) を変換する。結果は

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\xi_{*1}^R, \xi_{*2}^L) &\propto h^\phi(\xi_{*1}^R, \xi_{*2}^L) = \\
&\int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \langle 0 | \left(\hat{a}^L(\rho_1) \hat{a}^R(\rho_2) \bar{u}_{\rho_1}^L(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_2}^R(\xi_{*1}^R) + \right. \\
&\left. \hat{a}^{L\dagger}(\rho_1) \hat{a}^{R\dagger}(\rho_2) \bar{u}_{\rho_1}^{L*}(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_2}^{R*}(\xi_{*1}^R) \right) | 0 \rangle \\
&= \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^\infty d\xi_{*3}^L d\xi_{*2}^R \frac{2\sqrt{\rho_1 \rho_2} \sinh \pi \rho_1 \sinh \pi \rho_2}{\pi^2} K_{i\rho_1}(m\alpha e^{\xi_{*3}^L}) K_{i\rho_2}(m\alpha e^{\xi_{*2}^R}) \\
&\times \langle 0 | \left(\hat{\chi}^L(\xi_{*3}^L) \hat{\chi}^R(\xi_{*2}^R) \bar{u}_{\rho_1}^L(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_2}^R(\xi_{*1}^R) + \hat{\chi}^{L\dagger}(\xi_{*3}^L) \hat{\chi}^{R\dagger}(\xi_{*2}^R) \bar{u}_{\rho_1}^{L*}(\xi_{*2}^L) \bar{u}_{\rho_2}^{R*}(\xi_{*1}^R) \right) | 0 \rangle \quad (5.136)
\end{aligned}$$

である。(5.135) と (5.136) を比較すると、両者の Rindler 系の左右領域からの寄与が確認できる。その違いは、Rindler 系—Minkowski 系である (5.135) に、 $\hat{\chi}^L \hat{\chi}^{L\dagger}$, $\hat{\chi}^R \hat{\chi}^{R\dagger}$ といった項が存在し、一方 (5.136) には存在しなく、 $\hat{\chi}^L \hat{\chi}^R$, $\hat{\chi}^{L\dagger} \hat{\chi}^{R\dagger}$ のみである。量子纏れの一つの判定基準であったネガティブティにおいて、ネガティブティを決定する相関関数 (5.63) にも、 $\hat{\chi}^L \hat{\chi}^{L\dagger}$, $\hat{\chi}^R \hat{\chi}^{R\dagger}$ といった項は存在しない。すなわち、Rindler 系—Rindler 系においては、非常にうまく量子纏れの情報が導き出せていると考えられる。一方、Rindler 系—Minkowski 系では、因果的には一見独立な粒子描像に見えるが、独立でなく相互に関係が残っていると考えられる。そのため量子纏れの相関とは言いえない。

5.6 遷移振幅でみる相関

真空の量子纏れの空間的構造には、2 粒子の位置の変化に関する相対的確率振幅 (5.46) の空間的構造 (図 5.1)(図 5.2) が強く反映している。そこで、この 2 粒子相関についても座標系の選択を反映する検出器場を導入し、遷移振幅としてその構造を見直しておく。

検出器場 $\hat{\phi}^d(x)$ によって対象場 $\hat{\phi}(x)$ の Minkowski 系の真空 $|0\rangle$ が攪乱される場合を考える。相互作用項は第 5.5 節で用いた

$$\hat{V} = \int_{-\infty}^{\infty} dx : \hat{\phi}^d(x) \hat{\phi}^d(x) : \hat{\phi}(x) \quad (5.137)$$

を想定する。初期状態は

$$|0\rangle \otimes |x_*^{dR}\rangle^{dR} \quad (5.138)$$

とする。すなわち、攪乱は右側領域で行う。そのとき、左側領域に Rindler 系の粒子を 1 個発見できる遷移振幅 $\mathcal{A}(x_*^{dR}, \xi_*^L)$ を計算し、 (x_*^{dR}, ξ_*^L) の相関をみる。これを計算するにあたり、瞬間近似を取る。この近似は、Minkowski 系にしても Rindler 系にしても局在状態は時間とともに瞬時に拡散するためである。また、この相関には、第 5.3 節同様、真空の規格化定数の問題がある。そのため、遷移振幅には、 (x_*^{dR}, ξ_*^L) の変化に関しての相対的意味しかない。

まず、瞬間近似での遷移振幅を

$$\sum_{\psi^R} \langle \psi^R | \otimes \langle \xi_*^L | \otimes {}^{dR} \langle x_*^R | e^{-i\Delta T \hat{V}} | 0 \rangle \sim -i\Delta T \mathcal{A}(x_*^{dR}, \xi_*^L) \quad (5.139)$$

と導入する。 \sum_{ψ^R} は、右領域では可能な状態すべた加えるという意味である。 $\mathcal{A}(x_*^{dR}, \xi_*^L)$ は

$$\mathcal{A}(x_*^{dR}, \xi_*^L) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\psi^R} \langle \psi^R | \otimes \langle \xi_*^L | \otimes {}^{dR} \langle x_*^R | \hat{V} | x_*^R \rangle^{dR} \otimes |0\rangle^\phi \quad (5.140)$$

$$= \sum_{\psi^R} \int_{-\infty}^{\infty} dx {}^{dR} \langle x_*^R | : \phi^d(x) \phi^d(x) : | x_*^R \rangle^{dR} \times \langle \psi^R | \otimes \langle \xi_*^L | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \quad (5.141)$$

である。 ${}^{dR} \langle x_*^R | : \phi^d(x) \phi^d(x) : | x_*^R \rangle^{dR}$ については、Minkowski系、Rindler系ともに、前節で計算済みである。本小節では、結果が鮮明であろう Rindler系を参照基準系として選ぶ。すなわち、(5.141) の $|x_*^R\rangle^{dR}$ は Rindler系での粒子の局在化状態 $|\xi_*^R\rangle^{dR}$ となる。相互作用項の対象場は検出器場に合わせ右側領域に制限されるので、左側領域部分は拾わない。

検出器系を $h^d(\xi_*^R, \xi_*^L)$ とし、対象場系を $g^\phi(x, \xi_*^L)$ と書き

$$g^\phi(x, \xi_*^L) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\psi^R} \langle \psi^R | \otimes \langle \xi_*^L | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \quad (5.142)$$

と定義する。具体的に、 $g^\phi(x, \xi_*^L)$ を計算する。このとき、すでに示した $h^d(\xi_*^R, \xi_*^L)$ の性質から $x \sim \xi_*^R$ と近似するので、相互作用項の対象場は Rindler系の右側の解だけで展開すれば十分である。これにより $\langle \psi^R |$ は制限され

$$\begin{aligned} g^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L) &= \sum_{\psi^R} \langle \psi^R | \otimes \langle \xi_*^L | \hat{\phi}(\xi_*^R) | 0 \rangle \\ &= \left(\langle \bar{0} | + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R \langle \xi_{*1}^R, \xi_{*2}^R | \right) \otimes \langle \xi_*^L | \hat{\phi}(\xi_*^R) | 0 \rangle \\ &\stackrel{\text{def}}{=} g_0^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L) + g_2^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L) \end{aligned} \quad (5.143)$$

となる。ここで $g_0^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L)$, $g_2^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L)$ は

$$g_0^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L) \stackrel{\text{def}}{=} \phi \langle \bar{0}^R | \otimes \phi \langle \xi_*^L | \phi^\phi(\xi_*^R) | 0 \rangle^\phi \quad (5.144)$$

$$g_2^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R \phi \langle \xi_{*1}^R, \xi_{*2}^R | \otimes \phi \langle \xi_*^L | \phi^\phi(\xi_*^R) | 0 \rangle^\phi \quad (5.145)$$

である。 $g_0^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L)$ は、右側は Rindler系の粒子描像での真空である相対的確率振幅を表す。 $g_0^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L)$ を D 関数で書くと

$$\begin{aligned} g_0^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L) &= N \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 e^{-\pi\rho_2\phi} \langle \bar{0} | \chi^L(\xi_*^L) \bar{a}_{\rho_1}^R \bar{u}_{\rho_1}^R(\xi_*^R) \bar{a}_{\rho_2}^{R\dagger} \bar{a}_{\rho_2}^{L\dagger} | \bar{0} \rangle^\phi \\ &= N \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 e^{-\pi\rho_2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R d\xi_{*3}^R D_{\rho_1}(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) D_{\rho_2}^*(\xi_{*2}^R) D_{\rho_2}^*(\xi_{*3}^R) \\ &\quad \times \phi \langle \bar{0} | \chi^L(\xi_*^L) \chi^R(\xi_{*1}^R) \chi^{R\dagger}(\xi_{*2}^R) \chi^{L\dagger}(\xi_{*3}^R) | \bar{0} \rangle^\phi \\ &= N \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{*1}^R \int_0^\infty d\rho_1 D_{\rho_1}(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) \int_0^\infty d\rho_2 e^{-\pi\rho_2} D_{\rho_2}^*(\xi_{*1}^R) D_{\rho_2}^*(\xi_*^L) \\ &= N \int_0^\infty d\xi_{*1}^R \bar{g}_0^\phi(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) \tilde{g}_0^\phi(\xi_{*1}^R, \xi_*^L) \end{aligned} \quad (5.146)$$

である。\$N\$ は Minkowski 系の真空に関する規格化定数で明確には定義できない。ここで
 の \$\bar{g}_0^\phi(\xi_*^R, \xi_{*1}^R)\$ と \$\tilde{g}_0^\phi(\xi_{*1}^R, \xi_*^L)\$ の定義は

$$\bar{g}_0^\phi(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\rho D_\rho(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) \quad (5.147)$$

$$\tilde{g}_0^\phi(\xi_{*1}^R, \xi_*^L) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\rho e^{-\pi\rho} D_\rho^*(\xi_{*1}^R) D_\rho^*(\xi_*^L) \quad (5.148)$$

である。(5.147),(5.148) の数値積分⁵を図 5.13、図 5.14 に示す。

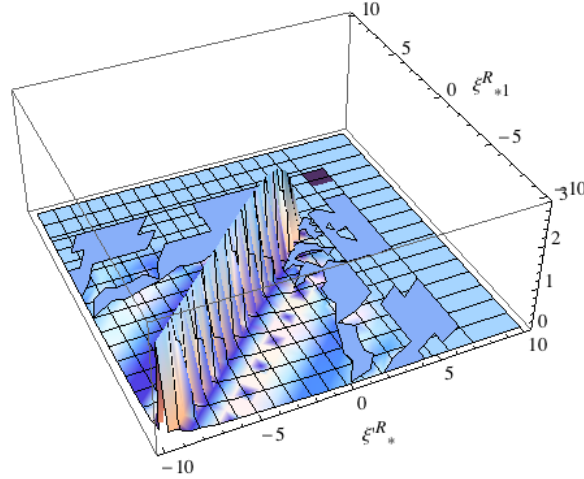


図 5.13. 参照基準系を Rindler 系にとった場合の対象系の相関を示す確率振幅 \$\bar{g}_0^\phi(\xi_*^R, \xi_{*1}^R)\$。

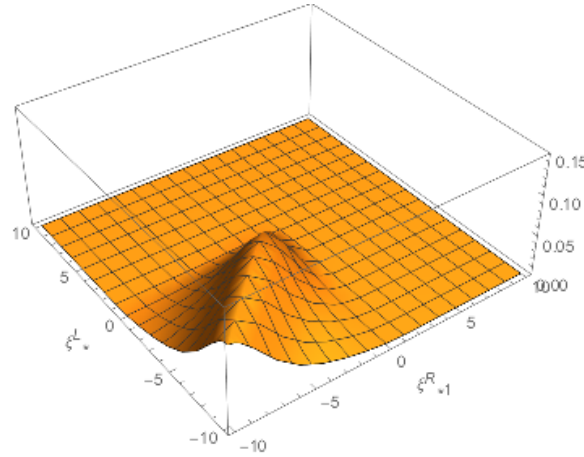


図 5.14. 参照基準系を Rindler 系にとった場合の対象系の相関を示す確率振幅 \$\tilde{g}_0^\phi(\xi_{*1}^R, \xi_*^L)\$。

結果は、図 5.13、図 5.14 の積としてみなくてはならない。そこで、図 5.13 の性質より、 $g_0^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L)$ は $\xi_*^R \sim \xi_*^L$ で大きな値を持つ。一方、領域 ($\xi_*^R > 0, \xi_*^L > 0$) への伝搬は、図 5.14 の性質より抑えられる。これらの性質は、前節での Rindler 系— Rindler 系の相関 $\mathcal{I}(\xi_*^R, \xi_*^L)$ と同じである。

⁵ $\beta = m = \alpha = 1$ で計算を行った。

同様に、右側に Rindler 系の粒子が 2 個存在する相対的確率振幅 $g_2^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L)$ も D 関数で書くと

$$\begin{aligned}
g_2^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L) &= N \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^\infty d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R d\xi_{*3}^R d\xi_{*4}^R d\xi_{*5}^L e^{-\pi\rho_2} \\
&\quad \times \langle \bar{0} | \chi^R(\xi_{*1}^R) \chi^R(\xi_{*2}^R) \chi^{R\dagger}(\xi_{*3}^R) \chi^{R\dagger}(\xi_{*4}^R) \chi^L(\xi_*^L) \chi^{L\dagger}(\xi_{*5}^L) | \bar{0} \rangle \\
&= N \int_0^\infty d\rho_1 d\rho_2 \int_{-\infty}^\infty d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R e^{-\pi\rho_2} \\
&\quad \times \left(D_{\rho_1}(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) D_{\rho_2}^*(\xi_{*2}^R) D_{\rho_2}^*(\xi_*^L) + D_{\rho_1}(\xi_*^R, \xi_{*2}^R) D_{\rho_2}^*(\xi_{*1}^R) D_{\rho_2}^*(\xi_*^L) \right) \quad (5.149)
\end{aligned}$$

となる。これより、 $D_{\rho_1}(\xi_*^R, \xi_{*1(2)}^R)$ で閉じており、 (ξ_*^R, ξ_*^L) との相関を持つことはないことが分かるので (ξ_*^R, ξ_*^L) との相関はない。

以上より、 $g(\xi_*^R, \xi_*^L)$ において相関を示す部分を $\bar{g}(\xi_*^R, \xi_*^L)$ と書くと

$$\bar{g}(\xi_*^R, \xi_*^L) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^\infty d\xi_*^R g^d(\xi_*^R, \xi_*^R) g_0^\phi(\xi_*^R, \xi_*^L) \quad (5.150)$$

である。これより、意味のある部分を検出器を通し導き出すことはできたが、結果は非常に緩慢になる。

検出器系を Minkowski 系の Newton-Wigner 粒子の局在化状態で考えた場合は、終状態がより複雑となり、検出器系との相関を見ることはより困難となる。

第6章 結語

純粹状態の場合、量子纏れとは合成系の状態ベクトルが構成要素の状態ベクトルの直積とならない状況をいう。本稿において、混合状態に拡張した量子纏れの基準を使い、Unruh効果における相対論的量子纏れの空間的構造を調べた。

基本的構成要素は Rindler 空間の各 Rindler wedge の粒子描像（生成、消滅演算子とそれによって構成される Fock 空間）である。合成系の状態ベクトルは、Minkowski 空間の真空であり、この状態は空間的に大局的なものである。合成状態である真空の空間的構造を調べるには、構成要素の空間的局在性が重要である。この局在性を二つの立場で考察した。一つは通常の相対論的場の量子論を踏襲し、Newton-Wigner の議論を拡張することによって行った。もう一つは、古典論、量子力学そして場の量子論を統一的に扱う対称性変換群の表現論を基にしたものである。

まず、対称性変換群の余随伴軌道としての位相空間を構成し、それに対応したユニタリ表現を作ることにより、量子力学を構成する。これにより、量子論的観測量と古典的位相空間の対応が明確になる。そして、これを多体系に拡張し基本的粒子描像を得る。これにより、基本的粒子描像を特徴付けるパラメータの意味とその局在性を明確にできる。

Rindler wedge のような配位空間が半直線の場合は、空間的位置で特徴付けられる粒子描像が基本的であることが分かる。その粒子描像を Klein-Gordon 方程式の解で展開することにより解のモードで特徴付けられる新たな粒子描像が導入でき、この粒子描像を通し通常のアプローチとの対応が取れ、通常の場合の理論と矛盾のないことがわかる。

これらの考察を基に作られた構成要素の粒子描像を使い、合成状態である Minkowski 系の真空の量子纏れの空間的構造を、混合状態の量子纏れの基準を与えるネガティビティを計算することにより調べた。Klein-Gordon 方程式の解のモードによる粒子描像で Minkowski 系の真空を表現すると、因子化でき構造は単純である。一方、空間的構造は、因子化ができなく注目した自由度に関する混合状態となり複雑である。しかし、ネガティビティを通した量子纏れの基準は正準量の相関 $\langle 0|\hat{q}^L(\xi_*^L)\hat{q}^R(\xi_*^R)|0\rangle$ で表せる。そのため、左右の位置で特徴付けられるこの相関により、量子纏れの空間的構造を調べることができる。

結果は、

1. 原点から左右等距離にある状態の量子纏れが顕著である。(図 5.5)
2. その距離が原点から離れると急激に量子纏れの程度は弱くなる。またその距離は質量に依る。(図 5.3)、(図 5.4)、(図 5.5)、(5.58)
3. 左右の Rindler wedge の原点をずらし、異なった Rindler 座標系を導入した時、左右領域の重ならない部分の基本的粒子描像は独立であるが、左右の纏れは、原点のずれで見るとより長距離に及ぶ。(図 5.7)

である。また、原点をずらす操作に対し Minkowski 空間の真空は不変であるという事実も

確認できる。

正準量の相関を使い、量子纏れの空間的構造を調べたが、正準量は直接場の量として現れない。そこで、量子場の真空期待値である Wightman 関数からこの相関に対応する量を抜き出すことを試みた。そのために、量子場の基本的粒子描像と座標系の選択とを結び付ける方法を提案した。座標系の選択は観測者が等速運動しているか等固有加速度運動しているかによって決まる。この状況を反映させるため、観測者とともに動く検出器系を導入した。検出器系は検出器場と間接的に観測する対象場からなり、相互作用項はこれらの場を共変的に結合させた。座標系の選択により検出器場の状態ベクトルを制限することで直接制御し、対象場はそれを通し間接的に制御する。このような検出器系を、Minkowski 空間の対象場の真空の密度演算子を通した期待値と瞬間近似を使った遷移振幅に適用し、左右の Rindler wedge に対応する相関を調べた。

座標選択による相関への影響は、左右の相関が消失する点に現れる。左右両方の検出器が共に等固有加速度運動している方が、一つは等速運動し他方は固有加速度運動している場合より相関は短い。図 5.12 及び図 5.11 を参照。(5.136) から分かるように、量子纏れからくる正準量の相関の性質を、図 5.12 は緩慢にはなるが反映する。これは、独立な粒子描像を的確に取り出しているためである。一方、後者の方は左右独立な粒子描像でないことに起因する項が存在する (5.135)。そのため、長距離になると思われる。

遷移確率に関する解析は、相関のない項の影響があり、左右の相関はより不鮮明になる。

検出器場の導入による間接的な相関の観測は、ここに示した Rindler 系と Minkowski 系だけでなく、Rindler 系の原点が一致しない 2 つの検出器の導入、あるいは局在性の議論ができない質量のない電磁場を対象場とする場合 [18] の量子纏れの空間的構造の研究など発展の可能性は大きい。

また、de Sitter 空間での局在性の問題 [44][45] を場の量子論へ拡張し、真空の違いによる Unruh 効果 [46] の空間的構造を調べることも課題となる。

付録 A 対称性変換群の具体例と基本的粒子描像

この付録において、対称性変換群の具体的な例として、半直積群 $R \circledast R_+$ と Poincaré 群を扱う。 $R \circledast R_+$ 群については、Rindler 空間の議論で重要であるが、時間に関する対称性が群に含まれていない。そこで、Hamiltonian について制限がつかないので二つの可能性を示す。

Poincaré 群については、余随伴軌道の構成の起点を時間的に取り、通常の場合の理論を再現する。この場合において、Newton-Wigner の局在化状態の詳細も紹介する。

A.1 $R \circledast R_+$ 群：半直線空間

配位空間が半直線 R_+ のとき、対称性変換群は $R \circledast R_+$ であり、群則は

$$(v_2, \zeta_2) \cdot (v_1, \zeta_1) = (v_2 + \zeta_2^{-1}v_1, \zeta_2\zeta_1) \quad (\text{A.1})$$

である。ここでは、 ζ_i, v_i は各群の元 ($\zeta_i \in R_+, v_i \in R$) である。無限小の実数を $\epsilon_i, \varepsilon_i$ とし、群の元を単位元 $(0, 1)$ の周りで展開する

$$v_i \sim \epsilon_i, \quad \zeta_i \sim 1 + \varepsilon_i, \quad (\text{A.2})$$

と、群則 (A.1) より

$$(v_1, \zeta_1) \cdot (v_2, \zeta_2) - (v_2, \zeta_2) \cdot (v_1, \zeta_1) \sim (\varepsilon_2\epsilon_1 - \varepsilon_1\epsilon_2, 0) \quad (\text{A.3})$$

という関係式を得る。これにより、Lie 環の基底 $\{e_i\}$ が満たす括弧積

$$[e_1, e_2] = e_1 \quad (\text{A.4})$$

を得る。

A.1.1 余随伴軌道の構成

具体的計算を行うため、 2×2 行列で Lie 環の基底を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

と表す。双対基底 $\{\bar{e}^i\}$ は、内積を跡 Tr で

$$\text{Tr}(\bar{e}^i e_j) = \delta_{ij} \quad (\text{A.6})$$

と定義することにより、

$$\bar{e}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

と表せる。

群の元 g 及び逆元 g^{-1} を

$$g = \exp(-t^2 e_2) \exp(t^1 e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t^1 \\ 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t^1 e^{t^2} \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

と実数 t^i で表す。

位相空間としての余随伴軌道の基点 $\bar{\lambda}_0$ を \bar{e}^1 に選ぶ。そこで、余随伴軌道は

$$\bar{\lambda}(g) = \lambda_1 \bar{e}^1 + \lambda_2 \bar{e}^2, \quad \lambda_1 = e^{t^2}, \quad \lambda_2 = t_1 e^{t^2} \quad (\text{A.9})$$

となり、位相空間は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 空間であることがわかる。1-形式を

$$\theta = -\text{Tr}(\bar{e}^1 g d g^{-1}) = dt^1 e^{t^2} \quad (\text{A.10})$$

と与えると、2-形式は

$$d\theta = dt^2 \wedge dt^1 e^{t^2} \quad (\text{A.11})$$

となり、余随伴軌道上の関数 $F(\lambda_1, \lambda_2), G(\lambda_1, \lambda_2)$ に対する Poisson 括弧は

$$\{F, G\}_P = e^{-t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial t^2} \frac{\partial G}{\partial t^1} - \frac{\partial F}{\partial t^1} \frac{\partial G}{\partial t^2} \right) \quad (\text{A.12})$$

と定義できる。変数 t^1, t^2 に対しては

$$\{t^2, t^1\}_P = e^{-t^2} \quad (\text{A.13})$$

となるので、新たな変数

$$x_+ = e^{t^2}, \quad p = t^1 \quad (\text{A.14})$$

を用いると、Poisson 括弧は

$$\{x_+, p\}_P = 1 \quad (\text{A.15})$$

となる。また、係数 λ_i に関する Poisson 括弧は

$$\{\lambda_1, \lambda_2\}_P = \lambda_1 \quad (\text{A.16})$$

と Lie 環の括弧積 (A.4) と同じ関係を満たすことが確認できる。

A.1.2 量子論と粒子描像

対称性変換群 $R \otimes R_+$ のユニタリ表現を求めることにより量子論を構成する。群の元 $(0, \zeta_i), (v_i, 1)$ に対し、状態ベクトル空間 \mathcal{H} に作用するユニタリ演算子 $\hat{U}(\zeta_i), \hat{V}(v_i)$ を対応させると、群則 (A.1) より

$$\hat{U}(\zeta_2)\hat{U}(\zeta_1) = \hat{U}(\zeta_2\zeta_1), \quad \hat{V}(v_2)\hat{V}(v_1) = \hat{V}(v_2 + v_1), \quad \hat{U}(\zeta)\hat{V}(v) = \hat{V}(\zeta^{-1}v)\hat{U}(\zeta) \quad (\text{A.17})$$

という関係式を得る。 $\hat{U}(\zeta), \hat{V}(v)$ を

$$\hat{U}(\zeta(t^2)) = e^{-it^2\hat{\pi}}, \quad \hat{V}(v(t^1)) = e^{-it^1\hat{x}_+} \quad (\text{A.18})$$

と書く。演算子 $\hat{x}_+, \hat{\pi}$ は、(A.17) より、交換関係

$$[\hat{x}_+, \hat{\pi}] = i\hat{x}_+ \quad (\text{A.19})$$

を満たす。

\hat{V} が Abelian 群なので、 \hat{x}_+ を対角化した状態ベクトル

$$\hat{x}_+|x_+\rangle = x_+|x_+\rangle, \quad x_+ \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{A.20})$$

を導入する。これにより、 \hat{V} の $|x_+\rangle$ への作用は

$$\hat{V}(t^1)|x_+\rangle = |x_+\rangle e^{-it^1x_+} \quad (\text{A.21})$$

となり、状態ベクトルの位相を変化させる。一方 \hat{U} の作用は

$$\hat{U}(t^2)|x_+\rangle = |e^{t^2}x_+\rangle \quad (\text{A.22})$$

となる。そこで、状態ベクトルの完全性は不変測度を用い

$$\mathbf{1} = \int_0^\infty |x_+\rangle \frac{dx_+}{x_+} \langle x_+| \quad (\text{A.23})$$

であり、状態ベクトル $|x_+\rangle$ の規格化は

$$\langle x_+|x'_+\rangle = \delta(x_+ - x'_+)x_+ \quad (\text{A.24})$$

である。状態ベクトル $|\psi\rangle$ に対する確率振幅 $\psi(x_+)$ は

$$\psi(x_+) = \langle x_+|\psi\rangle \quad (\text{A.25})$$

である。

また、交換関係 (A.19) より

$$\langle x_+|\hat{\pi}|\psi\rangle = -ix_+ \frac{\partial}{\partial x_+} \psi(x_+) \quad (\text{A.26})$$

となるので、演算子 $\hat{\pi}$ に関する固有状態

$$\hat{\pi}|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (\text{A.27})$$

の確率振幅 $\langle x_+|\sigma\rangle$ は

$$-ix_+ \frac{\partial}{\partial x_+} \langle x_+|\sigma\rangle = \sigma \langle x_+|\sigma\rangle \quad (\text{A.28})$$

を解くことにより

$$\langle x_+|\sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x_+)^{i\sigma}, \quad \int_0^\infty \langle \sigma'|x_+\rangle \frac{dx_+}{x_+} \langle x_+|\sigma\rangle = \delta(\sigma - \sigma') \quad (\text{A.29})$$

と求まる。 $\hat{U}(t^2)$ の $|\sigma\rangle$ への作用は位相となるが、 $\hat{V}(t^1)$ の作用は固有状態としての性質を壊すので、固有値 σ を変える演算子はない。

対称性変換群 $R \otimes R_+$ では時間発展に関する条件はない。そこで、Hamiltonian の一候補として

$$\hat{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\pi}^2 + \mu \hat{x}_+^2 \quad (\text{A.30})$$

が考えられる。 μ は実数。演算子 $\hat{\Omega}$ の固有状態

$$\hat{\Omega}|\Omega\rangle = \Omega|\Omega\rangle \quad (\text{A.31})$$

の確率振幅を

$$\psi_\Omega(x_+) = \langle x_+|\Omega\rangle \quad (\text{A.32})$$

と導入する。 $\psi_\Omega(x_+)$ の満たす方程式は

$$\left(-x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} \left(x_+ \frac{\partial}{\partial x_+} \right) + \mu x_+^2 \right) \psi_\Omega(x_+) = \Omega \psi_\Omega(x_+) \quad (\text{A.33})$$

である。これは変形 Bessel の微分方程式である。また、直交性と完全性は

$$\int_0^\infty \langle \Omega|x_+\rangle \frac{dx_+}{x_+} \langle x_+|\Omega'\rangle = \delta(\Omega - \Omega'), \quad \int_0^\infty \langle x_+|\Omega\rangle d\Omega \langle \Omega|x'_+\rangle = \frac{\delta(x_+ - x'_+)}{x_+} \quad (\text{A.34})$$

である。変形 Bessel 関数を使った、具体的議論は付録 B.1 で行う。また、 $\hat{\Omega}$ を Hamiltonian とした場合の議論は、第 4.3 節と付録 B.1 で行う。

多体系への拡張のための生成、消滅演算子は状態 $|x_+\rangle$, $\langle x_+|$ に対応させ

$$\langle x_+| \iff \hat{a}(x_+), \quad |x_+\rangle \iff \hat{a}^\dagger(x_+) \quad (\text{A.35})$$

と導入する。交換関係は

$$[\hat{a}(x_+), \hat{a}^\dagger(x'_+)] = \delta(x_+ - x'_+)x_+, \quad [\hat{a}(x_+), \hat{a}(x'_+)] = [\hat{a}^\dagger(x_+), \hat{a}^\dagger(x'_+)] = 0 \quad (\text{A.36})$$

である。対称性変換群に対する変換性は

$$\hat{U}(t^2)\hat{a}^\dagger(x_+)\hat{U}^\dagger(t^2) = \hat{a}^\dagger(e^{t^2}x_+), \quad \hat{V}(t^1)\hat{a}^\dagger(x_+)\hat{V}^\dagger(t^1) = \hat{a}^\dagger(x_+)e^{-it^1x_+} \quad (\text{A.37})$$

である。

A.2 Poincaé群：Minkowski空間

A.2.1 Poincaé群

Poincaré群 $(T^d \otimes SO(1, d-1))$ は Wigner[15] によって最初に考察された。群則は

$$(v_2, L_2) \cdot (v_1, L_1) = (v_2 + L_2 v_1, L_2 L_1) \quad (\text{A.38})$$

である。 $v_i \in T^d$ 、 $L_i \in SO(1, d-1)$ 。 Poincaré群は相対論的力学、相対論的量子力学そして場の理論を群論的に基礎づける。簡単のため、 $d = 3$ として検討する。

この群の Lie 環の基底 e_μ は次の3種類である。 (e_{T_0}, e_{T_i}) 、 (e_J) 、 (e_{K_i}) 。ただし、 $i = 1, 2$ とする。 Lie 環の基底間の括弧積は、

$$[e_{T_\mu}, e_{T_\nu}] = 0, \quad [e_{T_0}, e_J] = 0, \quad [e_J, e_{T_1}] = e_{T_2}, \quad (\text{A.39})$$

$$[e_J, e_{T_2}] = -e_{T_1}, \quad [e_{K_i}, e_{T_j}] = \delta_{ij} e_{T_0}, \quad [e_{K_i}, e_{T_0}] = e_{T_i}$$

$$[e_J, e_{K_1}] = e_{K_2}, \quad [e_J, e_{K_2}] = -e_{K_1}, \quad [e_{K_1}, e_{K_2}] = -e_J \quad (\text{A.40})$$

である。 (A.40) は Lie 環 $\mathfrak{so}(1, 2)$ である。

A.2.2 余随伴軌道の構成

基点を $\bar{\lambda}_0 = \bar{e}^{T_0}$ とする余随伴軌道を構成する。この軌道は $(T^3 \otimes SO(1, 2)/T^1 \times SO(2))$ である。

具体的計算は 4×4 行列で行う。 Lie 環の基底 $\{e_\mu\}$ は行列 T_μ 、 J 、 K_i で

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

と表す。内積 $\langle \bar{e}^\mu | e_\nu \rangle$ は行列の跡 (Tr) で

$$\text{Tr}(\bar{T}^\mu T_\nu) = \delta_{\mu\nu}, \quad \text{Tr}(\bar{K}^i K_j) = \delta_{ij}, \quad \text{Tr}(\bar{J}, J) = 1, \quad \text{その他は } 0 \quad (\text{A.43})$$

と定義する。これにより双対空間の基底 $\{\bar{e}_\mu\}$ は

$$\bar{T}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$\bar{J} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

となる。

閉部分群 H (小群) は

$$h = e^{-\theta J} e^{a^0 T_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

である。一方、基点 $\bar{\lambda}_0$ を動かす元 σ は

$$\sigma = e^{-\tau^1 K_1 - \tau^2 K_2} e^{a^1 T_1 + a^2 T_2} = \mathcal{B}(\vec{\tau}) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^1 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.47})$$

である。 $\mathcal{B}(\vec{\tau})$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\vec{\tau}) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & -\tau^1 & -\tau^2 & 0 \\ -\tau^1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \tau & -\frac{\tau^1}{\tau} \sinh \tau & -\frac{\tau^2}{\tau} \sinh \tau & 0 \\ -\frac{\tau^1}{\tau} \sinh \tau & \frac{(\tau^1)^2}{\tau^2} (\cosh \tau - 1) + 1 & \frac{\tau^1 \tau^2}{\tau^2} (\cosh \tau - 1) & 0 \\ -\frac{\tau^2}{\tau} \sinh \tau & \frac{\tau^1 \tau^2}{\tau^2} (\cosh \tau - 1) & \frac{(\tau^2)^2}{\tau^2} (\cosh \tau - 1) + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

であり、 $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2)$, $\tau = \sqrt{\vec{\tau}^2}$ である。 $\mathcal{B}(\vec{\tau})$ をブースト変換と呼ぶ。パラメータの意味を明確にするため、

$$p^0 = \cosh \tau, \quad p^1 = \frac{\tau^1}{\tau} \sinh \tau, \quad p^2 = \frac{\tau^2}{\tau} \sinh \tau \quad (\text{A.49})$$

とする。 $\mathcal{B}(\vec{\tau})$ の性質上、覆える領域は $p^0 \geq 1$ に限られ、

$$-(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 = -1 \quad (\text{A.50})$$

となる。そこで、 p^0 はエネルギー、 p^i は運動量と見なすと、(A.50) は質量殻条件である。以上より、(A.48) は

$$\mathcal{B}(\vec{\tau}) = \begin{pmatrix} p^0 & -p^1 & -p^2 & 0 \\ -p^1 & \frac{(p^1)^2}{p^0+1} + 1 & \frac{p^1 p^2}{p^0+1} & 0 \\ -p^2 & \frac{p^1 p^2}{p^0+1} & \frac{(p^2)^2}{p^0+1} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.51})$$

と表せる。また、 $\mathcal{B}(\vec{\tau})^{-1} = \mathcal{B}(-\vec{\tau})$ である。

簡略のため

$$B_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} p^0 & -p^1 & -p^2 \\ -p^1 & \frac{(p^1)^2}{p^0+1} + 1 & \frac{p^1 p^2}{p^0+1} \\ -p^2 & \frac{p^1 p^2}{p^0+1} & \frac{(p^2)^2}{p^0+1} + 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.52})$$

として、

$$\mathcal{B}(\vec{\tau}) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & B_{\mu\nu} & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (\text{A.53})$$

と書く。これにより、 σ 及び σ^{-1} は

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & B_{0i}a^i \\ & B_{\mu\nu} & & B_{1i}a^i \\ & & & B_{2i}a^i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \sigma^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & B_{\mu\nu}^{-1} & & -a^1 \\ & & & -a^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (\text{A.54})$$

となる。余随伴軌道

$$\bar{\lambda}_\sigma = f_{T_\mu} \bar{e}^{T_\mu} + f_J \bar{e}^J + f_{K_i} \bar{e}^{K_i} \quad (\text{A.55})$$

の係数は

$$f_{T_\mu} = p^\mu, \quad f_J = \tilde{a}^1 p^2 - \tilde{a}^2 p^1, \quad f_{K_i} = p^0 \tilde{a}^i + p^i \tilde{a}^0 \quad (\text{A.56})$$

である。ただし、 $\tilde{a}^\mu = B_{\mu i} a^i$ 。

$d\sigma^{-1}\sigma$ は

$$d\sigma^{-1}\sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \sum_\nu dB_{0\nu}^{-1} B_{\nu i} a^i \\ & (dB^{-1}B)_{\mu\nu} & & \sum_\nu dB_{1\nu}^{-1} B_{\nu i} a^i - da^1 \\ & & & \sum_\nu dB_{2\nu}^{-1} B_{\nu i} a^i - da^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{A.57})$$

であるので、1-形式 θ は

$$\theta = -\langle \bar{\lambda}_0 | d\sigma^{-1}\sigma \rangle = -\sum_\nu dB_{0\nu}^{-1} B_{\nu i} a^i = -\left(\delta_{ij} - \frac{(p^0 - 1)p_i p_j}{p_k p^k p^0} \right) a^i dp^j \quad (\text{A.58})$$

となる。2-形式 ω は

$$\omega = d\theta = -\left(\delta_{ij} - \frac{(p^0 - 1)p_i p_j}{p_k p^k p^0} \right) da^i \wedge dp^j \quad (\text{A.59})$$

である。そこで、 $dz^\mu = (da^1, da^2, dp^1, dp^2)$ として、行列 $\omega_{\mu\nu}$ は

$$\omega_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -A_{ij} \\ \hline A_{ji} & 0 \end{array} \right), \quad A_{ij} = \left(\delta_{ij} - \frac{(p^0 - 1)p_i p_j}{p_k p^k p^0} \right) \quad (\text{A.60})$$

となる。逆行列 $\omega^{\mu\nu}$ は

$$\omega^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_{ij}^{-1} \\ \hline -A_{ji}^{-1} & 0 \end{array} \right), \quad A_{ij}^{-1} = \left(\delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{(p^0 + 1)} \right) \quad (\text{A.61})$$

と求まる。

以上より、余随伴軌道上の関数 $F(z^\sigma), G(z^\rho)$ の Poisson 括弧を

$$\{F(z^\sigma), G(z^\rho)\}_P = \omega^{\mu\nu} \frac{F(z^\sigma)}{\partial z^\mu} \frac{G(z^\rho)}{\partial z^\nu} \quad (\text{A.62})$$

と定義する。それにより

$$\{a^i, p^j\}_P = A_{ij}^{-1} \quad (\text{A.63})$$

となるので、新たな変数 x^i を

$$x^i = A_{ij} a^j \quad (\text{A.64})$$

と導入すると、Poisson 括弧は

$$\{x^i, p^j\}_P = \delta_{ij} \quad (\text{A.65})$$

となる。ちなみに、上記のパラメータを使った余随伴軌道の係数 f_{e_μ} は、

$$f_{e^{T_0}} = p^0, \quad f_{e^{T_i}} = p^i, \quad f_{e^J} = x^1 p^2 - x^2 p^1, \quad f_{K^i} = p^0 x^i \quad (\text{A.66})$$

となる。また、各係数間の Poisson 括弧は Lie 環の代数と同じ関係を満たすことは確認できる。

以上より、古典的位相空間と、そこでの代数が完成した。

A.2.3 量子力学と粒子描像

次に、Wigner の方法に基づき、相対論的量子力学を構成する。Lie 環に対応した演算子が満たす代数は

$$[\hat{T}_\mu, \hat{T}_\nu] = 0, \quad [\hat{T}_0, \hat{J}] = 0, \quad [\hat{J}, \hat{T}_1] = i\hat{T}_2, \quad (\text{A.67})$$

$$[\hat{J}, \hat{T}_2] = -i\hat{T}_1, \quad [\hat{K}_i, \hat{T}_j] = i\delta_{ij}\hat{T}_0, \quad [\hat{K}_i, \hat{T}_0] = i\hat{T}_i$$

$$[\hat{J}, \hat{K}_1] = i\hat{K}_2, \quad [\hat{J}, \hat{K}_2] = -i\hat{K}_1, \quad [\hat{K}_1, \hat{K}_2] = -i\hat{J} \quad (\text{A.68})$$

である。

Poincaré 群には、Casimir 演算子

$$\hat{C} = -(\hat{T}_0)^2 + (\hat{T}_1)^2 + (\hat{T}_2)^2 \quad (\text{A.69})$$

が存在する。また可換な部分群 \mathcal{T} が存在するので、この変換を生成する演算子を対角化した状態

$$\hat{T}_\mu |p, s\rangle = p_\mu |p, s\rangle \quad (\text{A.70})$$

を導入する。(A.69) より、

$$-(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 = -1 \quad (\text{A.71})$$

であり、規格化は

$$\langle p, s | p', s' \rangle = \delta^2(p - p') \delta_{ss'} \quad (\text{A.72})$$

とする。そこで、完全性は

$$\sum_s \int d^2p |p, s\rangle \langle p, s| = \mathbf{1} \quad (\text{A.73})$$

である。不変測度を強調すると

$$\mathbf{1} = \sum_s \int \frac{d^2p}{2p^0} |p, s\rangle \langle 2p^0| \langle p, s| \quad (\text{A.74})$$

となる。基点 \bar{e}^{T^0} に対応する状態ベクトルを $|k, s\rangle$ とする。

$$\hat{T}^\mu |k, s\rangle = \delta^{0\mu} |k, s\rangle \quad (\text{A.75})$$

ここでは、粒子描像と局在性の議論を行うのが目的のため、内部自由度 s に関しては自明な表現 $s = 0$ を取る。そこで、閉部分群 H の元 h に対応したユニタリー演算子 $\hat{U}(h)$ は

$$\hat{U}(h)|k\rangle = |k\rangle \quad (\text{A.76})$$

となる。ブースト $\mathcal{B}(\vec{\tau})$ と並進変換 $\mathcal{T}(x)$ の元を作用させる。まず、状態ベクトル $|p\rangle$ を

$$\hat{U}(\sigma(p))|k\rangle = \frac{1}{N(p)}|p\rangle \quad (\text{A.77})$$

とする。 $p^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$ とし、ブースト $\hat{U}(\Lambda)$ を作用させる。

$$\hat{U}(\Lambda)|p\rangle = N(p)\hat{U}(\Lambda\sigma(p))|k\rangle = N(p)\hat{U}(\sigma(p')h)|k\rangle \quad (\text{A.78})$$

これより、

$$\hat{U}(\Lambda)|p\rangle = \frac{N(p)}{N(p')}|p'\rangle \quad (\text{A.79})$$

となる。不変測度 (A.74) の使用

$$\hat{U}(\Lambda)|p\rangle \langle 2p^0| \langle p| \hat{U}^\dagger(\Lambda) = |p'\rangle \langle 2p'^0| \langle p'| \quad (\text{A.80})$$

を考慮して、規格化定数 $N(p)$ を決めると、

$$N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}}, \quad \hat{U}(\Lambda)|p\rangle = \sqrt{\frac{p'^0}{p^0}}|p'\rangle \quad (\text{A.81})$$

である。一方、並進変換に関しては

$$\hat{U}(\sigma(x))|p\rangle = |p\rangle e^{ip_i x^i} \quad (\text{A.82})$$

である。これより分かるように、並進変換は Abelian のため、位置のパラメータ x は位相として現れる。そこで状態 $|\psi\rangle$ に、古典的粒子を位相空間ない (p, x) に見出す確率は

$$|\langle \psi|p\rangle e^{ip_i x^i}|^2 = |\langle \psi|p\rangle|^2 \quad (\text{A.83})$$

となる。ここで、配位空間の位置の情報は位相なので、量子論的に意味がない。

多体系へ拡張するため、粒子描像を導入する。対応関係 (2.38) に従い生成、消滅演算子及び粒子数演算子 $\hat{a}^\dagger(p)$, $\hat{a}(p)$, $\hat{n}(p)$ を導入する。満たす代数は Boson 型の (2.39)(2.40) である。生成、消滅演算子の変換性は、(A.81)(A.82) より

$$\hat{U}(\Lambda, a)\hat{a}(p)\hat{U}^\dagger(\Lambda, a) = \sqrt{\frac{p'^0}{p^0}}e^{-ip'_i a^i}\hat{a}(p'), \quad \hat{U}(\Lambda, a)\hat{a}^\dagger(p)\hat{U}^\dagger(\Lambda, a) = \sqrt{\frac{p'^0}{p^0}}e^{-ip'_i a^i}\hat{a}^\dagger(p') \quad (\text{A.84})$$

となる。これが、Poincaré 群 $(T^d \otimes SO(1, d-1))$ を対称性変換群とした基本的粒子描像である。

A.2.4 Newton-Wigner の局在化状態と古典的形態：物質波と粒子

多粒子系において、粒子数を無限大にした極限として古典的形態を見る。

また、基本的粒子描像にはない粒子の位置を Newton-Wigner の議論に従い構成し、多体系に拡張する。これによって古典的極限を調べる。

物質波と共変性

生成、消滅演算子の位相部分を分離する。

$$\hat{a}(p) = e^{i\eta(p)}\sqrt{\hat{n}(p)}, \quad \hat{a}^\dagger(p) = \sqrt{\hat{n}(p)}e^{-i\eta(p)} \quad (\text{A.85})$$

ただし、 $\sqrt{\hat{n}(p)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n(p)}|n(p)\rangle\langle n(p)|$ である。そこで、生成、消滅演算子の交換関係 (2.40) より、

$$e^{i\eta(p)}\sqrt{\hat{n}(p)} - \sqrt{\hat{n}(p)}e^{i\eta(p)} = e^{i\eta(p)} \quad (\text{A.86})$$

となり、

$$[\hat{\eta}(p), \hat{n}(p)] = -i \quad (\text{A.87})$$

を得る。これにより、位相を確定するには粒子数を無限大にする必要があることが分る。そこでコヒーレント状態

$$\hat{a}(p)|\alpha(p)\rangle = \alpha(p)|\alpha(p)\rangle, \quad \alpha(p) = |\alpha(p)|e^{i\eta(p)} \quad (\text{A.88})$$

を導入する。 $|\alpha(p)\rangle$ の表記は

$$|\alpha(p)\rangle = \sum_n e^{in\eta(p)}\sqrt{\frac{\omega_n}{n!}}(\hat{a}^\dagger(p))^n|0\rangle, \quad \omega_n = \frac{(n(p))^n e^{-n(p)}}{n!}, \quad \alpha(p) = \sqrt{n(p)}e^{i\eta(p)} \quad (\text{A.89})$$

である。 $\langle\alpha(p)|\alpha(p)\rangle = 1$ と規格化。よって、粒子の数演算子の期待値 $n(p)$ 及び粒子数の揺らぎ $\Delta n(p)$ は

$$\langle\alpha(p)|\hat{n}(p)|\alpha(p)\rangle = n(p) \quad (\text{A.90})$$

$$\Delta n(p) = \sqrt{\langle\alpha(p)|(\hat{n}(p))^2|\alpha(p)\rangle - n(p)^2} = \sqrt{n(p)} \quad (\text{A.91})$$

である。また、 $n(p)$ を固定し、位相 $\eta(p)$ だけ違ったコヒーレント状態の内積は

$$\langle\alpha'(p)|\alpha(p)\rangle = \exp\left(-n(p)(1 - e^{i(\eta'(p) - \eta(p))})\right) \quad (\text{A.92})$$

はゼロでない。よって位相の識別はできない。もし、 $n(p) \rightarrow \infty$ を取れば、 $\eta(p) = \eta'(p)$ 以外は直交し、位相は識別できる。またこの極限では、 $\Delta n(p) \ll n(p)$ となり、量子揺らぎも無視できる。

以上を踏まえ、(A.84)のコヒーレント状態による期待値を取ると

$$\langle \alpha(p) | \hat{U}(\Lambda, a) a(p) \hat{U}^\dagger(\Lambda, a) | \alpha(p) \rangle = \sqrt{\frac{p'^0}{p^0}} e^{-ip'_i a^i} \sqrt{n(p)} e^{i\eta(p)} \quad (\text{A.93})$$

となり、 $n(p)$ を十分大きく取れば、位相及び粒子数が確定し、識別可能な位置概念が導入できる。ただし、波としての位置であるため、局在性とは相容れない。

実際に実験にかかる物質波（電磁波など）は実数で共変的である。同じコヒーレント状態に対し生成子は

$$\langle \alpha(p) | \hat{U}(\Lambda, a) \hat{a}^\dagger(p) \hat{U}^\dagger(\Lambda, a) | \alpha(p) \rangle = \sqrt{\frac{p'^0}{p^0}} e^{ip'_i a^i} \sqrt{n(p)} e^{-i\eta(p)} \quad (\text{A.94})$$

である。これらの線形結合を取り、実の共変的古典場を構成する。

共変的量子場を

$$\hat{\psi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^2p e^{ipx} u(p, x) a(p) = \int \frac{d^2p}{2p^0} \sqrt{2p^0} e^{ipx} u(p, x) \sqrt{2p_0} a(p) \quad (\text{A.95})$$

とする。共変性の要求は

$$\hat{U}(\Lambda) \hat{\psi}(x) \hat{U}^\dagger(\Lambda) = \hat{\psi}(\Lambda \cdot x) \quad (\text{A.96})$$

であるので、容易に

$$\sqrt{2p^0} u(p, x) = 1 \quad (\text{A.97})$$

であることが分かる。以上により、古典的実共変場を導入でき、古典的パラメータとしての位置に古典論との対応で物理的意味を与えることができる。しかし、局在性という点はまだ不十分である。

Newton-Wigner の局在状態と古典的粒子

相対論においても古典的粒子は存在する。そこで、相対論的量子論の古典的極限でも、物質波ではなく、粒子性を示す枠組みが必要である。そのためには、物質波と同様に、量子揺らぎが無視できる粒子数が大きい極限で、違った性質を示す粒子描像が不可欠である。

まず、一体の状態を確認する。Newton と Wigner[17] は次の3点を粒子の位置を表す状態に要求し、質量 M の相対論的粒子の位置概念を明確にした。そして、局在的状态 $|x\rangle$ とそれを固有状態とする位置演算子 \hat{x}_i を定義した。

1. 時間及空間の原点 ($o: t = 0, x^i = 0$) に局在化された状態 $|o\rangle$ は、空間回転、時間反転、空間反転に対し不変である。
2. 原点 o に局在化された状態を空間移動して出来た状態はもとの状態と直交する。(局在性)
3. Lorentz 群の生成子は局在状態に作用出来る。(正則条件)

要求 3. より局在的状态 $|o\rangle$ は運動量演算子 \hat{P}^μ の固有状态 $|p\rangle$

$$\hat{P}^i |p\rangle = p^i |p\rangle, \quad \langle p'|p\rangle = \delta^2(p' - p) \quad (\text{A.98})$$

の線形結合

$$|o\rangle = \int \frac{d^2p}{\sqrt{(2\pi)^2 2p^0}} f(o; p) |p\rangle \quad (\text{A.99})$$

で表せる。この状态に要求 2. を適用し、空間移動した状态 $|x\rangle$ は

$$e^{-ix^i \hat{P}_i} |o\rangle = |x\rangle, \quad |x\rangle = \int \frac{d^2p}{\sqrt{(2\pi)^2 2p^0}} f(o; p) e^{-ix^i \hat{P}_i} |p\rangle \quad (\text{A.100})$$

となる。直交条件 $\langle o|x\rangle = \delta^2(x)$ より、 $f(o; p)$ は

$$f(o; p) = \sqrt{2p^0} \quad (\text{A.101})$$

と決まる。また、 $|x\rangle$ を固有状态

$$\hat{x}^i |x\rangle = x^i |x\rangle \quad (\text{A.102})$$

とする演算子 \hat{x}^i は、 $|p\rangle$ に対する表現として

$$\hat{x}^i |p\rangle = -i \frac{\partial}{\partial p_i} |p\rangle \quad (\text{A.103})$$

となる。よって、状态 $|\psi\rangle$ に、粒子が位置 x で発見できる確率は

$$|\langle x|\psi\rangle|^2 \quad (\text{A.104})$$

である。以上から分かるように、力学的構造によらない部分は Heisenberg 群による位置と運動量の関係と同じである。

Newton-Wigner の議論を多体系に拡張することは容易である [24][25]。一粒子状态の $|p\rangle$ は生成演算子で書くと

$$|p\rangle = \hat{a}^\dagger(p) |0\rangle \quad (\text{A.105})$$

なので、 $|x\rangle$ は

$$|x\rangle = \int d^2p e^{-ix_i p^i} \hat{a}^\dagger(p) |0\rangle \quad (\text{A.106})$$

である。

そこで、場の量子論的多体系への拡張は、ある点に局在する状态の生成、消滅する演算子を

$$\hat{\chi}(x) = \int \frac{d^2p}{\sqrt{(2\pi)^2}} \hat{a}(p) e^{ix_i p^i}, \quad \hat{\chi}^\dagger(x) = \int \frac{d^2p}{\sqrt{(2\pi)^2}} \hat{a}^\dagger(p) e^{-ix_i p^i} \quad (\text{A.107})$$

と導入することで出来る。 $\hat{\chi}(x), \hat{\chi}^\dagger(x)$ の同時刻交換関係は

$$\begin{aligned} [\hat{\chi}(x), \hat{\chi}^\dagger(x')] &= \delta^2(x - x') \\ [\hat{\chi}(x), \hat{\chi}(x')] &= [\hat{\chi}^\dagger(x), \hat{\chi}^\dagger(x')] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

であり、位置 x にある粒子の生成、消滅演算子の性質を満たすことが分る。そこで、位置 x にある一粒子状態は

$$|x\rangle = \hat{\chi}^\dagger(x)|0\rangle \quad (\text{A.109})$$

である。数演算子は

$$\hat{n}(x) = \hat{\chi}^\dagger(x)\hat{\chi}(x) \quad (\text{A.110})$$

であり、局在的である。

今、次のように全粒子数演算子 \hat{N} と位置演算子 \hat{X}^i を導入する。

$$\hat{N} \stackrel{\text{def}}{=} \int d^2x \hat{\chi}^\dagger(x)\hat{\chi}(x) \quad (\text{A.111})$$

$$\hat{X}^i \stackrel{\text{def}}{=} \int d^2x \hat{\chi}^\dagger(x)x^i\hat{\chi}(x) \quad (\text{A.112})$$

これは、 $\hat{X}^i|x\rangle = x^i|x\rangle$ である。運動量演算子は

$$\hat{P}^i = \int d^2x \hat{\chi}^\dagger(x)\left(-i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\hat{\chi}(x) \quad (\text{A.113})$$

であるので、 \hat{P}_l との交換関係は (A.108) を用いて

$$[\hat{X}_j, \hat{P}_l] = i\delta_{jl}\hat{N} \quad (\text{A.114})$$

と求まる。これらの性質は Heisenberg 群によって構成したものと同一である。

Hamiltonian \hat{H} は

$$\hat{H} = \int d^2p p^0 \hat{a}^\dagger(p)\hat{a}(p) \quad (\text{A.115})$$

となるので、時間依存する生成・消滅演算子 $\hat{\chi}^{(\dagger)}(t, x) = e^{i\hat{H}t}\hat{\chi}^{(\dagger)}(x)e^{-i\hat{H}t}$ は

$$\hat{\chi}(t, x) = \int \frac{d^2p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{a}(p) e^{ix_i p^i} e^{-itp^0}, \quad \hat{\chi}^\dagger(t, x) = \int \frac{d^2p}{\sqrt{(2\pi)^2}} \hat{a}^\dagger(p) e^{-ix_i p^i} e^{itp^0} \quad (\text{A.116})$$

と導入できる。 $\hat{\chi}(t, x), \hat{\chi}^\dagger(t, x)$ の同時刻交換関係は

$$\begin{aligned} [\hat{\chi}(t, x), \hat{\chi}^\dagger(t, x')] &= \delta^2(x - x') \\ [\hat{\chi}(t, x), \hat{\chi}(t, x')] &= [\hat{\chi}^\dagger(t, x), \hat{\chi}^\dagger(t, x')] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

である。これにより、各時間での局在性は保証される。しかし、Hamiltonian \hat{H} を位置で特徴付けられる粒子描像 ($\hat{\chi}(x), \hat{\chi}^\dagger(x)$) で書くと

$$\hat{H} = \int d^2x' \int d^2x \hat{\chi}^\dagger(x') G(x', x) \hat{\chi}(x) \quad (\text{A.118})$$

となり、非局在的である。ただし

$$G(x', x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sqrt{k^2 + m^2} e^{-ik_i(x'-x)^i} \quad (\text{A.119})$$

である。

このような位置に関する粒子描像は代数的相対論的場の量子論の立場から問題点 (Reed-Schlieder の定理、Malament の定理、Hegerfeldt の定理) が指摘されている [47] が、その多くは、Hamiltonian がここで定義した位置に関して非局在的であることに帰因する。そこで、時間的方向の取り扱いの違いにより問題の現れ方が異なる。しかし、古典的には問題は起さないことを以下で示す。

そこで、 \hbar は定数であることを考慮し、 $\hbar \rightarrow 0$ の古典的極限 [48] を取らず、 $N \rightarrow \infty$ の古典的極限を取る。そのため、コヒーレント状態

$$|\Phi_X\rangle = \exp\left(\int dx^2(\phi_X(x)\hat{\chi}^\dagger(x) - \phi_X^*(x)\hat{\chi}(x))\right)|0\rangle \quad (\text{A.120})$$

を導入する。Heisenberg 群の場合と同じなので、 $\phi_X(x)$ として Gauss 型の波束

$$\phi_X(x) = \sqrt{\kappa} e^{-(x-X)^2/2\epsilon^2} e^{ik_i(x-X)^i} \quad (\text{A.121})$$

を取る。全粒子数演算子 (A.111)、位置演算子 (A.112)、運動量演算子 (A.113) の期待値は

$$\langle\Phi_X|\hat{N}|\Phi_X\rangle = \kappa\pi\epsilon^2 = \bar{N}, \quad \frac{1}{\bar{N}}\langle\Phi_X|\hat{X}^i|\Phi_X\rangle = X^i, \quad \langle\Phi_X|\hat{P}^i|\Phi_X\rangle = \bar{N}k^i \quad (\text{A.122})$$

となる。位置に関する全粒子数で割った場合、意味のある量になるので、この量は重心と理解できる [49]。

次に、重心の速度 dX_j/dt を計算する。Heisenberg 方程式は

$$-i[\hat{X}_j, \hat{H}] = \int d^2p \frac{p_j}{p^0} \int \frac{d^2x d^2x'}{(2\pi)^2} \hat{\chi}^\dagger(x)\hat{\chi}(x')e^{i(x^i-x'^i)p_i} \quad (\text{A.123})$$

と書ける。そこで、コヒーレント状態の期待値は

$$-i\langle\Phi_X|[\hat{X}_j, \hat{H}]|\Phi_X\rangle = \int d^2p \frac{p_j}{p^0} \int \frac{d^2x d^2x'}{(2\pi)^2} \phi_X(x)\phi_X(x')e^{i(x^i-x'^i)p_i} \quad (\text{A.124})$$

$$= \kappa\epsilon^4 \int d^2p \frac{p_j}{p^0} e^{-\epsilon^2(k_i-p^i)(k^i-p^i)} \quad (\text{A.125})$$

となる。ガウス型関数によるデルタ関数の表記

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}} \quad (\text{A.126})$$

を用いて、 $\epsilon \rightarrow \infty$ のもと書き変えると

$$-i\langle\Phi_X|[\hat{X}_j, \hat{H}]|\Phi_X\rangle = \kappa\pi\epsilon^2 \int d^2p \frac{p_j}{\sqrt{p_i p_i + m^2}} \delta^2(k-p) \quad (\text{A.127})$$

となる。そこで、重心の速度は、 $\bar{N} = \kappa\pi\epsilon^2$ より

$$\frac{dX_j}{dt} = -i \frac{1}{\bar{N}} \langle\Phi_X|[\hat{X}_j, \hat{H}]|\Phi_X\rangle = \frac{k_j}{\sqrt{k_i k_i + m^2}} \quad (\text{A.128})$$

と求まる。これは相対論的粒子の速度 $k_i/\sqrt{k_i k_i + m^2}$ と一致し、非相対論的な場合とは異なる。重心の加速度 d^2X_j/dt^2 については、並進対称性があるためゼロとなることは容易に確認できる。

付録B Rindler系での場の理論の幾つかの性質

この付録では、Rindler系における生成、消滅演算子の運動方程式に現れる積分核の性質と生成、消滅演算子のコーヒレント状態について調べる。

B.1 Rindler系でのHamiltonianと積分核

計算の見通しを良くするため、 $\xi(x_+)$ の代わりに変数 ξ_*

$$\xi_* = \log \frac{|\xi|}{\alpha} \quad (\text{B.1})$$

を取る。 ξ_* を使った変形第2種Bessel関数の直交性及び完全性は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_* K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*}) K_{i\rho'}(m\alpha e^{\xi_*}) = \frac{\pi^2 \delta(\rho - \rho')}{2\rho \sinh \pi\rho} \quad (\text{B.2})$$

$$\int_0^{\infty} d\rho \frac{2\rho \sinh \pi\rho}{\pi^2} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*'}) = \delta(\xi_* - \xi_*') \quad (\text{B.3})$$

である。

(4.46)で採用した、変数 ξ でのHamiltonian(Klein-Gordon型)に関するKlein-Gordonの方程式

$$\left(-\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + m^2 \xi^2 \right) \psi_\rho(m\xi) = \rho^2 \psi_\rho(m\xi) \quad (\text{B.4})$$

は

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi_*^2} + \alpha^2 m^2 e^{2\xi_*} \right) \psi_\rho(m\alpha e^{\xi_*}) = \rho^2 \psi_\rho(m\alpha e^{\xi_*}) \quad (\text{B.5})$$

と書ける。 $\Omega = \rho^2$, $\mu = m^2$ とした。(B.5)の有効ポテンシャル項部分 $\alpha^2 m^2 e^{2\xi_*}$ は $\xi_* \rightarrow -\infty$ で0に収束し、 $\xi_* \rightarrow \infty$ で急激に増加する。Rindler系特有の現象が原点近傍に現れるのは、 $\xi_* \rightarrow -\infty$ で有効ポテンシャル項が0になることに起因している。

Hamiltonian \hat{H}_{KG} (4.46)を変数 ξ_* で書くと

$$\hat{H}_{KG} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_* \hat{\chi}^\dagger(\xi_*) \sqrt{-\Delta + m^2 \alpha^2 e^{2\xi_*}} \hat{\chi}(\xi_*) \quad (\text{B.6})$$

となる。 $\Delta = \partial^2 / \partial \xi_*^2$ で、 $\sqrt{-\Delta + m^2 \alpha^2 e^{2\xi_*}}$ は

$$\sqrt{-\Delta + m^2 \alpha^2 e^{2\xi_*}} f(\xi_*) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*' G(\xi_*, \xi_*') f(\xi_*') \quad (\text{B.7})$$

$$G(\xi_*, \xi_*') \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} d\rho \frac{2\rho^2 \sinh \pi\rho}{\pi^2} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*'}) \quad (\text{B.8})$$

を意味する。 $G(\xi_*, \xi'_*)$ は積分核とよばれ、収束因子 $e^{\beta\rho}$ ($\beta > \pi$) を導入して具体的に計算する。 $G(\xi_*, \xi'_*)$ に収束因子を導入した式を改めて $\bar{G}(\xi_*, \xi'_*)$ と記す。

$$\begin{aligned}\bar{G}(\xi_*, \xi'_*) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty d\rho \frac{2\rho^2 \sinh \pi\rho}{\pi^2} K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi'_*}) e^{-\beta\rho} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty d\lambda K_0(m\alpha A(\lambda)) \int_0^\infty d\rho \rho^2 \sinh \pi\rho e^{i\rho\lambda} e^{-\beta\rho}\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

ここでは、変形第2種 Bessel 関数の関係式

$$K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi_*}) K_{i\rho}(m\alpha e^{\xi'_*}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\lambda e^{i\rho\lambda} K_0(m\alpha A(\lambda)) \quad (\text{B.10})$$

$$A^2(\lambda) = e^{2\xi_*} + e^{2\xi'_*} + 2e^{\xi_* + \xi'_*} \cosh \lambda \quad (\text{B.11})$$

を使用した。これにより $\bar{G}(\xi_*, \xi'_*)$ は

$$\begin{aligned}\bar{G}(\xi_*, \xi'_*) &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty d\lambda K_0(m\alpha A(\lambda)) \left(\frac{1}{(\pi - \beta + i\lambda)^3} - \frac{1}{(-\pi - \beta + i\lambda)^3} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty d\lambda K_0(m\alpha A(\lambda)) \frac{\pi^2 + 3(i\lambda - \beta)^2}{((i\lambda - \beta)^2 - \pi^2)^3}\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

と変形できる。(B.12) の被積分関数を

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} K_0(m\alpha A(z)) \frac{\pi^2 + 3(iz - \beta)^2}{((iz - \beta)^2 - \pi^2)^3} \quad (\text{B.13})$$

と書く。 $f(z)$ は $\beta \rightarrow 0$ で

$$f(z) \stackrel{\beta \rightarrow 0}{=} -K_0(m\alpha A(z)) \frac{\pi^2 - 3z^2}{z^2 + \pi^2} \quad (\text{B.14})$$

となる。変数 z を複素平面に解析接続すると、極の位置は図 B.1 の左側のようなになる。極 $-i(\beta - \pi)$ は $\beta \rightarrow 0$ にすると、実軸に沿う積分路を横切る [50]。これを避けるため、虚軸に沿い上半面に積分路を伸ばし、 $\beta \rightarrow 0$ を取る。虚軸に沿い上下する経路は相殺するので、図 B.1 の右側の積分路となる。

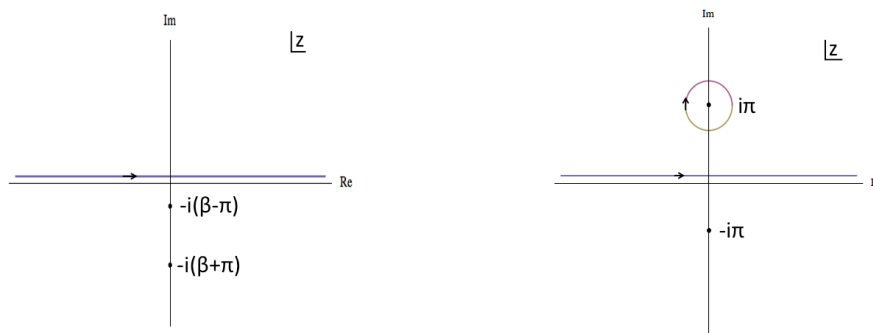


図 B.1 積分路

ここで、 $i\pi$ のまわりを周る積分路を C_r とし計算すると

$$\begin{aligned}
 \int_{C_r} f(z)dz &= -2\pi i \operatorname{Res}(f, i\pi) \\
 &= -2i\pi \left(-\frac{im^2\alpha^2 e^{\xi_* + \xi'_*} K_1(m\alpha|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|)}{4\pi m\alpha|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|} \right) \\
 &= -\frac{m\alpha e^{\xi_* + \xi'_*} K_1(m\alpha|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|)}{2|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|} \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

となる。これより

$$G(\xi_*, \xi'_*) = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda K_0(m\alpha A(\lambda)) \frac{\pi^2 - 3\lambda^2}{(\lambda^2 + \pi^2)^3} - \frac{m\alpha e^{\xi_* + \xi'_*} K_1(m\alpha|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|)}{2|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|} \tag{B.16}$$

となる。 $G(\xi_*, \xi'_*)$ を次のように分解し

$$G_1(\xi_*, \xi'_*) = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda K_0(m\alpha A(\lambda)) \frac{\pi^2 - 3\lambda^2}{(\lambda^2 + \pi^2)^3} \tag{B.17}$$

$$G_2(\xi_*, \xi'_*) = -\frac{m\alpha e^{\xi_* + \xi'_*} K_1(m\alpha|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|)}{2|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|} \tag{B.18}$$

数値積分を実行する。 $G_1(\xi_*, \xi'_*)$ は図 B.2 で、 $G_2(\xi_*, \xi'_*)$ は図 B.3 で示した。

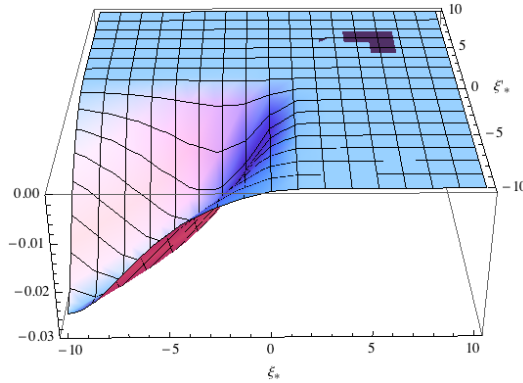


図 B.2 $G_1(\xi_*, \xi'_*)$

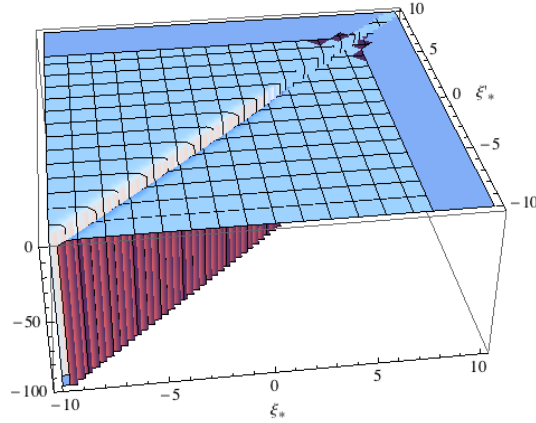


図 B.3 $G_2(\xi_*, \xi'_*)$

図 B.2、図 B.3 より、 $G(\xi_*, \xi'_*)$ は極の部分 $G_2(\xi_*, \xi'_*)$ で近似できることがわかる。

$$G(\xi_*, \xi'_*) \sim -\frac{m\alpha e^{\xi_* + \xi'_*} K_1(m\alpha |e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|)}{2|e^{\xi_*} - e^{\xi'_*}|} \quad (\text{B.19})$$

Hamiltonian に含まれる積分核は非局在的であり、これが因果律などの問題を起こす。しかし、図 B.3 から分かるように、 $\xi_* \sim \xi'_*$ にのみ非常に大きな値を持つ。そのため、この非局在性の観測への影響は非常に小さい。

B.2 $\hat{\chi}(\xi_*)$ のコヒーレント状態と古典的極限

量子論的自由度と古典的自由度との対応をとるためにコヒーレント状態

$$|\Phi_X\rangle = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_* (\phi_X(\xi_*)\chi^\dagger(\xi_*) - \phi_X^*(\xi_*)\chi(\xi_*))\right) |\bar{0}\rangle \quad (\text{B.20})$$

$$\phi_X = \sqrt{\kappa} e^{-\frac{(\xi_* - X)^2}{2\epsilon^2}} e^{ip(\xi_* - X)} \quad (\text{B.21})$$

を導入する。(B.20) は

$$\chi^R(\xi_*^R) |\Phi_X\rangle = \phi_X(\xi_*^R) |\Phi_X\rangle \quad (\text{B.22})$$

である。そこで、位置演算子のコヒーレント状態の期待値を計算する。

$$\begin{aligned} \langle \Phi_X | \hat{X} | \Phi_X \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R \phi_X^{R*}(\xi_*^R) \xi_*^R \phi_X^R(\xi_*^R) \\ &= \kappa \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R \xi_*^R e^{-\frac{(\xi_*^R - X)^2}{\epsilon^2}} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Gauss 積分をすることで

$$\langle \Phi_X | \hat{X} | \Phi_X \rangle = \epsilon \kappa \sqrt{\pi} X \quad (\text{B.24})$$

となる。数演算子も同様に、Gauss 積分を用いて計算すると

$$\langle \Phi_X | \hat{N} | \Phi_X \rangle = \epsilon \kappa \sqrt{\pi} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{N} \quad (\text{B.25})$$

となり、(B.24),(B.25) より、

$$\frac{1}{N} \langle \Phi_X | \hat{X} | \Phi_X \rangle = X \quad (\text{B.26})$$

となる。そこで、位置を全粒子数で割ることにより、重心と理解できる。これにより、量子論的自由度 ($\hat{\chi}, \hat{\chi}^\dagger$) と古典的自由度 (X) との対応が取れた。

次に速度について考察する。

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\eta} &= -i \langle \Phi_X | [\hat{X}, \hat{H}_{KG}] | \Phi_X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R \xi_*^R G(\xi_{*1}^R, \xi_{*2}^R) \\ &\quad \times \langle \Phi_X | [\chi^{R\dagger}(\xi_*^R) \chi^R(\xi_*^R), \chi^{R\dagger}(\xi_{*1}^R) \chi^R(\xi_{*2}^R)] | \Phi_X \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R d\xi_{*1}^R G(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) (\xi_*^R - \xi_{*1}^R) \phi_X^{R*}(\xi_*^R) \phi_X^R(\xi_{*1}^R) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

このとき、 $G(\xi_*^R, \xi_{*1}^R)$ が ξ_*^R, ξ_{*1}^R の入れ替えに対して対称である事を利用した。 ϕ_X^R が実関数のとき $\phi_X^{R*}(\xi_*^R)$ と $\phi_X^R(\xi_{*1}^R)$ も ξ_*^R, ξ_{*1}^R の入れ替えに関して対称となる。これにより、 $p=0$ のとき

$$\langle \Phi_X | [\hat{X}, \hat{H}_{KG}] | \Phi_X \rangle|_{p=0} = 0 \quad (\text{B.28})$$

となり、重心が静止した状況を表わすことが分かる。続いて、加速度について計算を行う。

$$\begin{aligned} [[\hat{X}, \hat{H}_{KG}], H_{KG}] &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R d\xi_{*3}^R G(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) G(\xi_{*2}^R, \xi_{*3}^R) \\ &\quad \times (\xi_*^R - \xi_{*1}^R) [\chi^{R\dagger}(\xi_*^R) \chi^R(\xi_{*1}^R), \chi^{R\dagger}(\xi_{*2}^R) \chi^R(\xi_{*3}^R)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R G(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) G(\xi_{*2}^R, \xi_*^R) \\ &\quad \times \chi^{R\dagger}(\xi_{*2}^R) \chi^R(\xi_{*1}^R) (\xi_{*2}^R + \xi_{*1}^R - 2\xi_*^R) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$p=0$ として、コヒーレント状態での期待値をとると

$$\begin{aligned} \langle \Phi_X | [[X, H], H] | \Phi_X \rangle|_{p=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R G(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) G(\xi_{*2}^R, \xi_*^R) \phi_X^R(\xi_{*2}^R) \phi_X^R(\xi_{*1}^R) (\xi_{*2}^R - \xi_*^R) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R G(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) G(\xi_{*2}^R, \xi_*^R) \phi_X^R(\xi_{*2}^R) \phi_X^R(\xi_{*1}^R) (\xi_{*1}^R - \xi_*^R) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_*^R d\xi_{*1}^R d\xi_{*2}^R G(\xi_*^R, \xi_{*1}^R) G(\xi_{*2}^R, \xi_*^R) \phi_X^R(\xi_{*2}^R) \phi_X^R(\xi_{*1}^R) (\xi_{*2}^R - \xi_*^R) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

となるが、加速度まで0とはできない。これは、Rindler系の原点の特異性のため、保存量が定義できないことに起因している。しかし、積分核は $\xi_{*1}^R, \sim \xi_*^R, \xi_{*2}^R, \sim \xi_*^R$ でのみ大きな値を持つことより、加速度もほぼ0と結論できる。

謝 辞

本研究は、平成 24 年 4 月から平成 29 年 3 月の間、担当教官尾高 一彦教授のご指導のもと行ったものです。

先生には時間の限りご指導頂き、論文を完成させることができました。これは何事にも変えられない喜びです。先生と過ごした貴重な時間を今後の職務に生かし、先生に少しでも恩返しできるように、学んだことを磨いていきます。ありがとうございました。

在籍中、講義を通して、荒井教授、加藤教授、新川教授、高木教授、松元教授、安岡教授、畑准教授、迫田講師、松村講師、情報数理の坂口教授、後期課程では、物質・基礎科学専攻の荒井教授、新川教授にお世話になりました。特に、新川教授、高木教授、そして、山口大学の白石教授には予備審査から卒業論文審査まで担当して頂きました。ありがとうございました。

学生間でも、この 5 年間、沢山の先輩、同期や後輩にお世話になりました。特に池田 1 空尉は唯一の同級であり、生活部屋も隣ということもあり、お世話になりました。また、本科学生ではありますが、57 期の木全君と藤田君とは同じ研究室で、一緒にゼミをしたことが思い出深いです。

最後に、国分学校長を始め防衛大学校の教職員の方々、特に、応用物理学科の事務室の方々、陸上自衛隊、特に技術管理系の先輩方からの多大なご支援に感謝します。

参考文献

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**(1935) 777.
- [2] N. Bohr, Nature **136**(1935) 65.
- [3] J.S. Bell, Physics **1**(1964) 195.
- [4] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**(1969) 880.
- [5] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**(1982) 1804.
- [6] D. Bohm, “Quantum Theory” 4th ed.(Prentice-Hall,1951)
- [7] P.A.M. Dirac, “The Principles of Quantum Mechanics” 4th ed.(Oxford,1958).
- [8] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**(2009) 865.
- [9] W.G. Unruh, Phys. Rev. **D14**(1976) 870.
- [10] S.Takagi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **88**(1986) 1.
- [11] B.S. DeWitt, in “General relativity: An Einstein centenary survey” edited by S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge,1979)680.
- [12] S. Schlicht, Class. Quant. Grav. **21**(2004)4647.
- [13] I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann, Phys. Rev. Lett. **95**(2005)120404.
- [14] D.E. Bruschi, J. Louko, E. Martin-Martinez, A.Dragan and I. Fuentes, Phys.Rev. **A82**(2010)042332.
- [15] E.P. Wigner, Ann. of Math. **40**(1939) 149.
- [16] A. Peres and D.R. Terno, Rev. Mod. Phys. **76**(2004)93.
- [17] T. Newton and E. Wigner, Rev. Mod. Phys. **21**(1949) 400.
- [18] A.S. Wightman, Rev. Mod. Phys. **34**(1962) 845.
- [19] T.O. Philips, Phys. Rev. **136**(1964) B893.

- [20] C. Isham, in “ Relativity, Groups and Topology II” edited by B.S. DeWitt and R. Stora (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1984) 1059.
- [21] M. Puta, “Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization” (Kluwer Academic Publishers 1993).
- [22] 森本直樹, “ 正準変換群を基にした拘束系の量子化” (修士論文, 2000.3 大学評価・学位授与機構提出)
- [23] 鬼丸力, “ 古典力学、量子力学、場の理論の構成方法に関する群論的考察” (修士論文, 2002.3 大学評価・学位授与機構提出)
- [24] S.S. Schweber, “ An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory” (Row, Peterson and Company 1961)
- [25] 亀淵迪, 表實, “ 量子力学特論”(朝倉書店,2003)
- [26] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, “ Quantum fields in curved space ” (Cambridge University Press, 1984).
- [27] R.M. Wald, “ Quantum Field Theory in Curved Spacetimes and Black Hole Thermodynamics” (The University of Chicago Press 1994).
- [28] L.C.B. Crispino, A. Higuchi and G.E.A. Matsas, Rev. Mod. Phys. **80**(2008) 786.
- [29] J.R. Letaw and J.D. Pfautsch, J. Math. Phys. **23**(1982) 425.
- [30] J.R. Letaw and J.D. Pfautsch, Phys. Rev. **D24**(1981) 1491.
- [31] 松本隆志, 尾高一彦, 防衛大学校理工学研究報告第 52 卷 第 2 号 (2015)1.
- [32] 松本隆志, “ 背景計量下における場の量子論と検出器 -局所性 vs. 共変性-” (修士論文, 2014.3 大学評価・学位授与機構提出)
- [33] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**(1996) 1413.
- [34] R.F. Werner, Phys. Rev. **A40**(1989)4277.
- [35] R. Simon, Phys. Rev. Lett **84**(2000) 2726.
- [36] K. Zyczkowski, P. Horodecki, A. Sanpera and M. Lewenstein, Phys. Rev. **A58**(1998) 883.
- [37] G. Vidal and R.F. Werner, Phys. Rev. **A65**(2002)032314.
- [38] S. Weinberg, “ The Quantum theory of fields, Vol. I: Foundations” (Cambridge University Press 1995)
- [39] Y. Ohnuki and S. Kitakado, J. Math. Phys. **34**(1992) 2827.

- [40] 森口繁一, 宇田川金圭久, 一松信 “岩波 数学公式集 I II III” (岩波書店, 1956).
- [41] Y. Ohnuki, “Unitary Representations of the Poincaré Group and Relativistic Wave Equations” (World Scientific, Singapore, 1988).
- [42] 堀田昌寛, ”量子情報と時空の物理”(サイエンス社,2014)
- [43] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, “Table of Integrals, Series, and Products” (Academic Press, 1980).
- [44] T.O. Philips and E.P. Wigner, in “Group theory and its applications”, ed. E. M. Loeb (Academic, 1968).
- [45] N. Yokomizo and J.C.A. Barata, J. Phys. A: Math and Theor. **45**(2012) 365401.
- [46] E.Mottola, Phys. Rev. **D31**(1985)754
- [47] H.P. Halvorson, “Locality, Localization and the Particle Concept: Topics in the Foundations of Quantum Field Theory”,
<http://philosci-archive.pitt.edu/id/eprint/346>, (University of Pittsburgh 2001).
- [48] N. Yokomizo and J.C.A. Barata, J. Math. Phys. **50**(2009) 123512.
- [49] M.H.L. Pryce, Proc. Roy. Soc. (London) **195A**(1948) 62.
- [50] P. Candelas and D. J. Raine, J. Math. Phys. **17**(1976) 2120.