アレーアンテナを用いた未知の到来波数に対する到来波の方向推定

防衛大学校理工学研究科後期課程

電子情報工学系専攻　情報知能メディア学教育研究分野

グェン　アン　トゥワン

平成30年3月

目 次

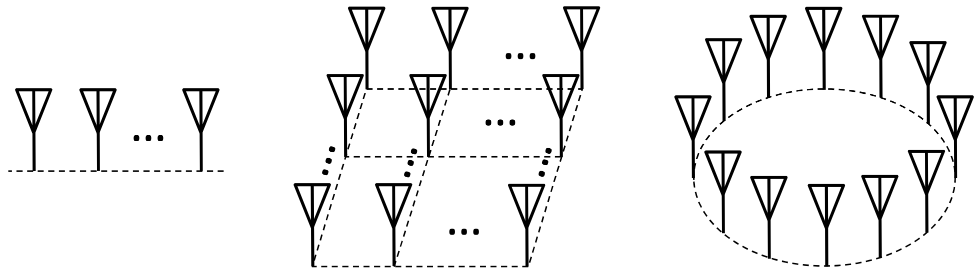
第1章　序論

1.1　研究背景

到来方向（DOA: Direction Of Arrival）推定は，長期間に渡っていまだに活発な研究分野である．歴史的に，到来方向推定技術はレーダや，ソナー，電子的手段による監視，地震探索等の分野で応用されている．レーダの応用では，到来方向推定が航空管制及び目標獲得で良く用いられている．また，到来方向推定を用いて相手の発信機の位置を特定することで，相手の信号を妨害することもある．

近年，無線通信技術の発展により，高速かつ高機能な無線通信システムが実用化され，広く普及している．このため，受信アンテナには複数の電波が到来する状況となり，確実な通信を行うとともに，その複雑に到来してきた電波の中から所望電波，あるいは不法電波の発信源を特定するために，電波を選びだす技術が必要となる．このことに対して，アンテナの指向特性に基づいた到来方向による選別が重要な手段となる．ここで，特徴を発揮するのは，複数個のアンテナ素子を規則的に配置し，各々のアンテナ素子の励振の振幅及び位相を独立かつ容易に制御できるアレーアンテナである．アレーアンテナを用いた到来方向推定は広く研究されている．図 1.1 に示すように，アレーアンテナには様々な形があり，例えば，直線状のリニアアレーや，格子状のグリッドアレー，円形状のサーキュラーアレー等があるが，使用目的に適切なアレー形状の検討が要求される．リニアアレーは構成が容易で，信号の数式化も他のアレー形状より単純であるため，良く利用されている．本研究ではリニアアレーを対象とする．

アレーアンテナを用いた到来方向推定のプロセスを図 1.2 で示す．図 1.2 により，遠方から複数の電波が，アレーアンテナに到来し，アレーアンテナの受信信号に



(a) リニアアレー　(b) グリッドアレー　(c) サーキュラーアレー

図 1.1: アレーアンテナ形状の例

対し，到来方向推定を含めた到来方向推定装置で計算処理を行った後に推定した到来方向の値を出力する，というプロセスとなる．到来方向推定には，到来波の性質，アレーアンテナの構成，到来方向の推定方法の主に 3 つの要素がある．

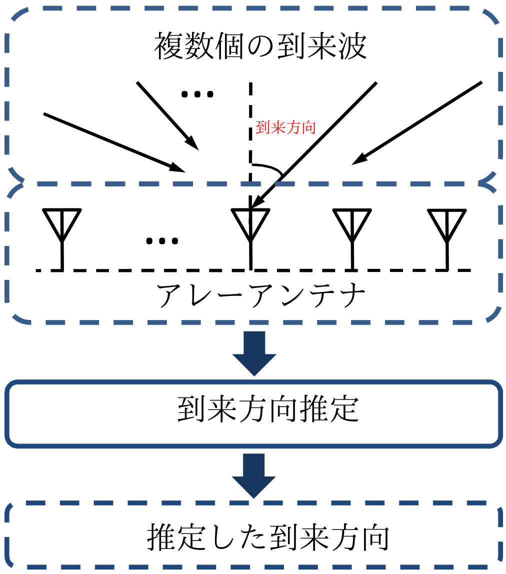


図 1.2: アレーアンテナを用いた到来方向推定の概略

まず，到来波の性質に関しては，主に到来波の相関性及び到来波数の情報の 2 つがある．到来波の相関性として代表的なものとして，互いに無相関である（全く異なる発信源からの電波で，各々の波の類似性は少ない）場合と，相関性がある（同じ発信源からの電波で，マルチパス伝播環境下で，各々の波の類似性が大きい）場合の 2 つがある．そして，到来波数の情報としては，これが既知であるか，未

知であるかの2つの状況が考えられる．一般には，到来波数の情報が必要な手法もあれば，到来波数の情報は不必要で未知のままでも推定可能な手法もある．実際には，到来波数情報はほとんどの場合未知なので，到来波数情報を必要とする手法では，事前に到来波数推定法を利用して到来波数を推定することが多い．これに対して，到来波数情報がなくても方向推定が可能な手法も存在する．

次に，アレーアンテナの構成に関しては，実アレー（一般の形で，物理的素子のみ含むアレーアンテナ）及び仮想アレー（特殊な形で，物理的素子以外に仮想素子を含むアレーアンテナ）の主に2つの構成がある．アレーアンテナの指向性パターンは図1.3に示すように，一様励振アレーアンテナの指向性パターンの最大値周辺であるメインローブ（Mainlobe）があり，その他にも局所的な極大値であるサイドローブ（Sidelobe）があり，そしてローブとローブの間のヌル点（Null, 零点）がある．

到来方向の推定方法に関しては，メインローブやヌル点の走査により推定する手法が多くある．また，方程式の解を求めることにより，その解が到来方向となるような手法もある．

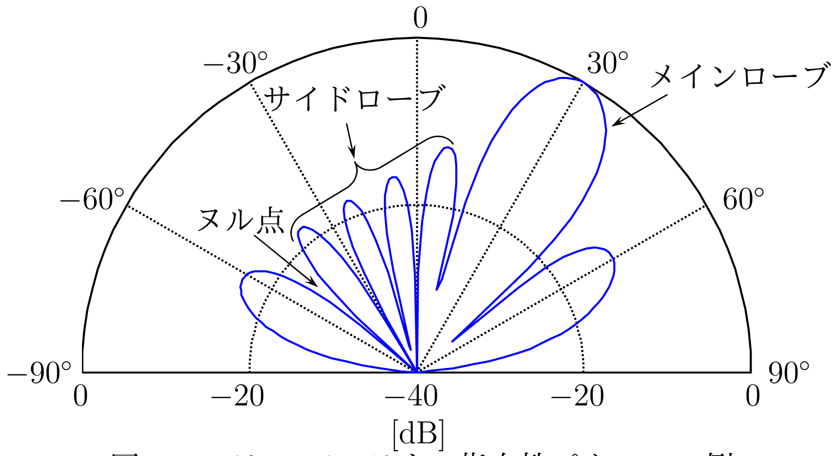


図 1.3: アレーアンテナの指向性パターンの例

そこで，到来波の性質及びアレーアンテナ構成を考慮しながら到来方向を推定する方法が多く研究され提案されている．メインローブの走査による到来方向推定法の最も基本的な手法として，ビームフォーマ（Beamformer）法 [1] がある．こ

の手法は，アレーアンテナのメインローブを全方向にわたって走査し，アレー出力電力が大きくなる方向から到来方向を推定する手法である．ビームフォーマ法は簡易であるが，所望波に対してメインローブを向けたとき，メインローブの他にいくつも存在するサイドローブで他の到来波も受信してしまうという問題点がある．

これに対して，Capon 法 [2] は，ある到来波の方向にメインローブを向けると同時に，他の到来波の方向へサイドローブの代わりにヌル点を向けることにより，所望の方向以外からの到来波の受信を最小化した到来方向推定法である．ビームフォーマ法と Capon 法は，到来波数情報が未知でも到来方向推定が可能であり，アレーのメインローブを到来方向に向けて受信し，その受信電力の大きさから到来方向を推定する方法であるため，メインローブの太さ（ビーム幅）により角度分解能が変化する．

ヌル点の走査による到来方向推定法は，同一条件下であれば，メインローブの走査による到来方向推定法より高い分解能で到来方向を推定できる．その理由は，メインローブ又はサイドローブは，アンテナ素子数に応じて，ある程度のビーム幅が存在するが，ヌル点は各ローブのビーム間に存在する谷間であり，各ビーム幅に比べ，細くて鋭いためである．このヌル点を利用した到来方向推定法の代表的手法として，MUSIC（MUltiple SIgnal Classification）法 [3]，[4] がある．MUSIC 法は，現在最も注目されている手法の 1 つであり，MUSIC 法を基礎とした手法が多くの研究により提案されている．MUSIC 法では，ヌル点を走査するため，アレーの受信信号の相関行列 (アレーアンテナの各素子間の位相差を表す行列) の固有値と固有ベクトルを分解した後，熱雑音電力に等しい固有値に対応する固有ベクトルの全てが到来波の方向ベクトル（アレーアンテナの位相基準点とアンテナ素子との位相差を表すベクトル）と直交することを利用して（部分空間法と呼ばれる），角度スペクトラムを求める．MUSIC 法は，分解能が高く，高精度な到来方向推定法であるが，正確な到来波数情報が必要となる．また，複素数を成分にもつ行列・ベクトル演算を用いるため，演算負荷が大きく，推定速度は遅い．

MUSIC 法と異なってヌル点の走査を必要とせず，方程式の解による到来方向推定法として，ESPRIT（Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques）法 [5]，[6] がある．この ESPRIT 法も，MUSIC 法と同じく現在最も注目されている手法の 1 つであり，ESPRIT 法を対象とした研究も多く行われている．ESPRIT 法は，2 つの同形なアレーの平行移動による位相差を推定し，この位相差から到来方向を推定する手法である．実際には平行移動ではなく，アレーを 2 つのサブアレーに分割し，擬似的に平行移動を実現することが多い．ESPRIT 法の演算も複素数による演算であるが，全方向に対する角度スペクトラムを必要としないため，MUSIC 法に比べて演算速度は速い．ESPRIT 法も MUSIC 法と同様に固有値・固有ベクトルを利用するため，正確な到来波数情報が必要となる．そこで，前述したように，部分空間法である到来方向推定法を適用するには，事前に到来波数を推定する必要がある．主な到来波数推定法として，固有値分解を用いた AIC（Akaike's Information Criterion）法 [7]，MDL (Minimum Description Length) 法 [8]，QR 分解を用いた MENSE（Method for Estimating the Number of Signals without Eigendecomposition）法 [9] 及び MENSE 法の改良法 [10]，[11]，[12] 等があるが，その中でも特に松原らによる手法 [12] は高精度な到来波数推定法であると知られている [12]．部分空間法では，事前に正確な到来波数情報が必要であるため，到来方向推定の精度は，到来波数推定の精度に依存してしまう．また，一般には MUSIC 法の推定精度より，ESPRIT 法の推定精度の方が低い [13].

これまで説明した手法では，到来波が互いに無相関であることを仮定しているが，マルチパス伝搬状況下においては反射波と干渉波が多く存在するため，受信波に複数の相関波が存在してしまう．このため，受信信号の相関行列のランクが落ちてしまい，到来方向推定の精度が低下する問題点がある．

このような受信信号の相関行列のランク落ちを避けるため，MUSIC 法等を適用する際に，事前処理として空間平均法である FOSS（Foward Only Spatial Smoothing）法 [14] 等が提案されている．この手法では，元のアレーを各サブアレーに分割し各サブアレーの相関行列の平均によりフルランクの相関行列が得られる．しかし，空間

平均法では，元のアレーより小さい複数のサブアレーを用いることにより，アレー開口長（直線状のアレーでは，アレー開口長とはアレーの全ての素子を含む長さ）が小さくなってしまうため，推定精度が低下するという問題点がある [14]．FOSS 法より推定精度を上げるため，FBSS（Forward/Backward Spatial Smoothing）[15] が提案されている．FBSS 法は，相関波が存在する場合においても高精度な推定が可能であり，同じアレーアンテナを用いると，FOSS 法より多くの到来波数に対応できるが，FOSS 法と同様にアレー開口長が小さくなる問題点がある．

空間平均処理による相関対策を必要とせず，相関波が存在する場合に対応できる手法として，最尤推定法に基づく EM（Expectation Maximization ML）法 [16] 及び SAGE（Space-Alternating Generalized Expectation-Maximization Algorithm）法 [17] 等がある．これらの手法では，到来方向以外に多くのパラメータを推定することができる利点があるが，複雑な最適化処理を導入しているため計算量が問題となることと，到来波数情報が既知として必要であることや，到来方向の推定精度が与える初期値に依存してしまうという不安定性があること等で，アプリケーションには不向きである [18]，[19]．

ESPRIT 法を改良した手法である ESPRIT-like [20] 法では，中心対称一様線形アレーアンテナが用いられ，全ての相関行列の行成分に対し，それぞれに対応するテプリッツ行列を構成した後に ESPRIT アルゴリズムを用いて到来方向を推定する．この方法も相関波が存在する場合において到来方向が推定可能であるが，正確な到来波数情報が必要となることと，雑音が大きい場合に推定精度が低下する問題点がある．

Zhang らは MUSIC-like 法 [21] を提案しており，これは到来波数情報がなくても到来方向を推定できる手法である．しかし，閾値の設定が必要となることと，相関波が存在する場合に推定精度が低下する問題がある．

Qian らは ESPRIT-like 法と同様の複数のテプリッツ行列を利用して，相関波が存在する環境下において，到来波数情報がなくても到来方向を推定できる高精度な手法を提案している (Qian 手法と呼ぶ) [22]．このため，Qian 手法では，方向推

定の精度が到来波数推定の精度に依存しないという利点がある．しかし，雑音が大きい場合とスナップショット数が少ない場合において，推定精度が低下する問題点がある．この問題点に対処し，未知の到来波数に対しても高精度な到来方向推定を実現することが本研究の一番目の課題である．

一方で，実アレーを用いてMUSIC法やQian手法を適用すると，アレー素子数以上の到来波に対して到来方向推定は不可能である．例えば，MUSIC法では，M素子を持つ実アレーの線形アレーに対して$(M-1)$個までの到来波に対応可能となる．従って，多数の到来波に対して到来方向を推定する場合，アレーの素子数が増加するという問題がある．このようなことから，到来波数がアレー素子数よりも多い場合，つまり劣決定と呼ばれる[23]場合においても方向推定を行なうために，アレー形状を特殊な形にして，実アレーから仮想アレーにすることで，アレーの素子数以上の到来波数に対しても到来方向推定が可能な手法が注目されており多く研究されている[24]，[25]．主な仮想アレーとして，古くから提案された最小冗長アレー（MLA: Minumum Redundancy Array）[26]，Golombらが提案したアレー（MHA: Minimum Hole Array）[27]等があるが，これらのアレーでは，任意の物理素子数に対する最適なアレー構成が求められない問題点があるため，アレーの性能の一般的な分析や評価は困難である[28]．さらに，アレー素子数が多い場合，アレーの受信信号の相関行列を求めることが困難である[28]．近年，Palらにより，MLAアレーとMHAアレーより簡単な構成で到来方向推定に扱いやすいネステッドアレー（Nested Array）[29]とコプライムアレー（Coprime Array）[30]が提案されており，多くの研究者に注目されている．ネステッドアレーでは近接している素子が多く存在しているため，素子間相互結合の影響が大きいので到来方向推定精度が低下している．それに対して，コプライムアレーの構成が容易な割には方向推定の性能が比較的良いので，注目されている[28]．この理由により，本研究でもコプライムアレーを対象とする．コプライムアレーは，素子数が互いに素である異なる2つの一様線形アレー（ULA: Uniform Linear Array）に対し最初の素子を共有して一直線に結合した形の線形アレーである．また，元のアレーの受

信信号の相関行列をベクトル化することにより，元のアレーより開口長が大きな仮想アレーが得られる．これは差分アレー（Difference Co-array）と呼ばれる．得られた差分アレーから仮想の ULA を抽出し，元のアレーより開口長が大きい仮想 ULA が得られる．求めた仮想 ULA に対し空間平均を行った後に，MUSIC 法等を適用すると高精度な到来方向推定ができる．これを Pal 手法と呼ぶ [30]．この手法は，M 素子のコプライムアレーを用いると，M^2 オーダーの到来波数まで対応可能となるという大きな利点を持つ．しかし，Pal 手法では，元のアレーの相関行列の一部のみ利用することや，空間平均処理を適用すること等で，到来方向の推定精度及び推定速度が低下する問題点がある．

Pal 手法では，コプライムアレーから差分アレーに拡張した後に，差分アレーから仮想の ULA を抽出することで，一部の仮想素子が切り捨てられてしまう．そのため，サンプルデータが無駄になり，また得られる仮想のアレーの開口長が縮小される．これらの問題点を改良するため，Liu らは核型ノルムによる補間を行い，仮想アレーの開口長を大きくして，Pal 手法より高い推定精度を得て，さらに対応できる到来波数も多くした (以降，Liu 手法と呼ぶ)[31]．

Pal 手法及び Liu 手法のように，アレー素子数以上の到来波に対して高精度な到来方向推定を実現することが本研究の二番目の課題である．

以上の到来方向推定法の特徴を表 1.1 に示す．

1.2　研究目的

本研究では，まず，前述した 2 つの課題の解決を目的とする．最初に，未知の到来波数に対して高精度な到来方向推定を実現するために，Qian 手法を改良して推定精度を向上させる．次に，アレー素子数以上の到来波に対して高精度な到来方向推定を実現するために，Pal 手法より推定精度を向上できる改良法を提案する．さらに，これら 2 つの課題に対する研究成果を用いて，未知の到来波数情報に対するアレー素子数以上の到来波数に対応できる高精度な方向推定を実現することを目的とする．

表 1.1: 到来方向推定法の概略

アレー構成	到来波数情報	到来波数推定法	到来方向推定法	到来方向推定精度	対応可能な到来波数	文献
実アレー	必要 (既知)	必要 (AIC 等)	Beamformer	×	素子数未満	[1]
			MUSIC	△		[3]
			ESPRIT	△		[5]
			ESPRIT-like	△		[20]
			FOSS-MUSIC	△		[14]
			FBSS-MUSIC	◯		[15]
	不要 (未知)	不要	MUSIC-like	△		[21]
			Qian ら	◯		[22]
			Capon	×	素子数以上	[2]
仮想アレー	必要 (既知)	必要 (AIC 等)	Pal ら-MUSIC	△		[30]
			Liu ら-MUSIC	◯		[31]

※推定精度: ◯ が良い，△ が普通，× が悪い

1.3 論文構成

本論文の構成は次のとおりである．第 **1** 章では研究の背景及び目的について述べた．続く第 **2** 章ではアレーアンテナ及び信号のモデルについて説明した後，従来の代表的な到来方向推定法について説明する．第 **3** 章では一つ目の課題である未知の到来波数に対する高精度な到来方向推定法の研究成果について説明する．次に第 **4** 章では 2 つ目の課題であるアレー素子数以上の到来波に対する高精度な到来方向推定法の研究成果について説明した後，第 **5** 章では 2 つの課題に同時に対処する研究成果を説明し，計算機シミュレーションにより提案法の有効性を示す．最後に，第 **6** 章では本研究のまとめを述べる．

第2章　アレーアンテナを用いた到来方向推定

本章では，本研究で利用するアレーアンテナと信号のモデルの設定について述べる．次に，到来方向推定において良く知られている MUSIC 法について説明する．

2.1　アレーアンテナと信号のモデル

2.1.1　アレーアンテナ

複数個のアンテナ素子を配列したものをアレーアンテナと呼ぶ．アレーアンテナでは，各アンテナ素子の受信信号の位相の差を使用することにより，到来方向を推定することが可能である．アレーアンテナを構成するためのアンテナ素子の配列は，図 1.1 に示したように直線状のリニアアレーや，格子状のグリッドアレー，円形状のサーキュラーアレー等いろいろ考えられる．このうちリニアアレーは構成が容易で，信号の数式化も他のアレー形状より単純であり，良く利用されているため，本研究でもリニアアレーを対象とする．この章では，図 2.1 に示すように，リニアアレーの一種である素子間隔が等しい一様線形アレーアンテナを使用する．

2.1.2　信号のモデル

無指向性の M 個のアンテナ素子からなる ULA に無限遠にある波源から 1 波が到来したとする．図 2.1 に示すように基準点から測って $\theta \in [-90°, 90°]$ の方向から入射する．この θ を到来角度といい，時計回りを正とする．到来波の内，異なる 2 波の到来方向からなる角度 ($\leq 180°$) を到来間隔と呼ぶことにする．アンテナ素

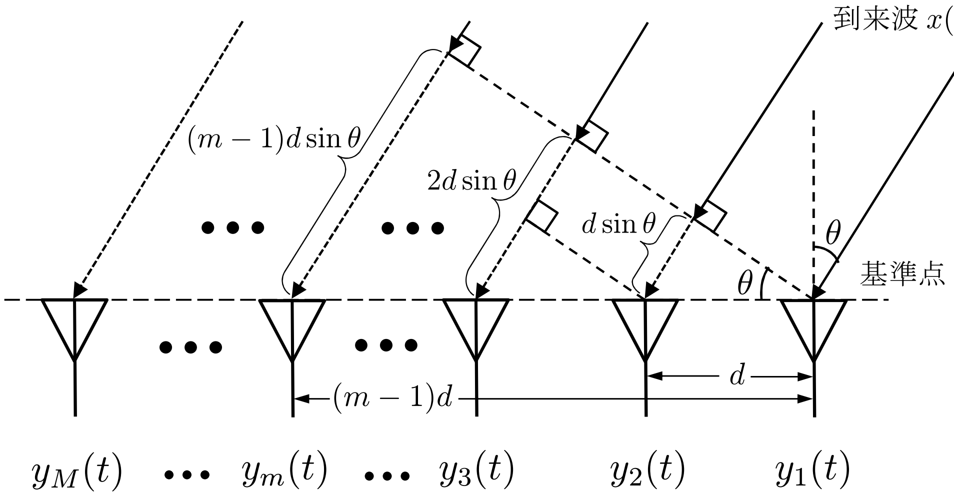


図 2.1: 一様線形アレーアンテナへの到来波

子の間隔を d, ある時刻 t に基準点で到来波のみを受信した場合の信号を $x(t)$，m 番目 $(m = 1, 2, \dots, M)$ のアンテナ素子で受信される信号を $y_m(t)$ とする．この時，空間的なアンテナ素子の配置により，隣り合った素子では電波の伝搬路に $d\sin(\theta)$ の距離の差があることが分かる．従って，1 番目の素子と m 番目の素子では電波の伝搬路に $(m-1)d\sin(\theta)$ の距離の差があり，c を到来波の伝播速度とすると，電波の到来に

$$\tau_m = \frac{(m-1)d\sin(\theta)}{c} \tag{2.1}$$

の時間差が生じる．式 (2.1) より τ_m が分かれば，到来方向 θ を求めることができる．時刻 t に 1 番目の素子で受信される信号を $y_1(t) = x(t)$ とすれば，m 番目のアンテナ素子で受信される信号 $y_m(t)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} y_m(t) &= x(t - \tau_m) \\ &= x\left(t - \frac{(m-1)d\sin(\theta)}{c}\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

次に，アレーアンテナの信号処理において基礎である解析信号について説明する．実環境上の信号が実数に数値化されたものを実信号というが，複素数化されたものは解析信号という．アレーアンテナにおいて受信信号の処理を簡単化する

ため，解析信号が用いられる [32]．到来波 $x(t)$ の実信号を $x^{(Re)}(t)$ とすると，実信号 $x^{(Re)}(t)$ から解析信号 $x(t)$ へ変換する方法は以下のようになる．実信号 $x^{(Re)}(t)$ に対しヒルベルト変換 [33] を行うことで $x^{(Re)}(t)$ より位相を $\frac{\pi}{2}$ 遅らせた $x^{(Im)}(t)$ を作成した後に，以下の式のように解析信号の $x(t)$ を定義する．

$$x(t) = x^{(Re)}(t) + jx^{(Im)}(t) \tag{2.3}$$

ここで，j は虚数単位として $j = \sqrt{-1}$ である．到来波 $x(t)$ の周波数を f（実数の定数）とし，到来波の帯域幅（周波数成分の広がり）Δf がアレー開口長 $(M-1)d$ に対して十分狭く，以下の式を満たすとする．

$$2\pi\Delta f \frac{(M-1)d}{c} \ll 1 \tag{2.4}$$

このとき，信号 $x^{(Re)}(t)$ の振幅，位相量をそれぞれ $E(t)$，δ（実数の定数）とすると，一般的に実信号 $x^{(Re)}(t)$ は次のように表示することができる．

$$x^{(Re)}(t) = E(t)\cos\big(2\pi ft + \delta\big) \tag{2.5}$$

上の実信号 $x^{(Re)}(t)$ を解析信号 $x(t)$ に変換し，$\cos\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\delta)$ となることに注意し，オイラーの公式を利用すると次のようになる．

$$\begin{aligned} x(t) &= E(t)\cos\big(2\pi ft + \delta\big) + jE(t)\cos\left(2\pi ft + \delta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= E(t)\Big(\cos\big(2\pi ft + \delta\big) + j\sin\big(2\pi ft + \delta\big)\Big) \\ &= E(t)\mathrm{e}^{j\left(2\pi ft + \delta\right)} \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで，到来波の波長を $\lambda = c/f$ とすると，第 m 素子での到来波 $x_m(t)$ を式 (2.2) を用いて以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned} x_m(t) &= E(t)\mathrm{e}^{j\left(2\pi f(t-\tau_m)+\delta\right)} \\ &= \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau_m}E(t)\mathrm{e}^{j(2\pi ft+\delta)} \\ &= \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau_m}x(t) \\ &= \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(m-1)d\sin(\theta)}x(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

このように，m 番目のアンテナ素子の受信信号 $x_m(t)$ は基準点の受信信号 $x(t)$ の $\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(m-1)d\sin(\theta)}$ 倍となる．以後，全ての信号は解析信号とする．

次に，m 番目のアレーアンテナ素子の受信信号 $y_m(t)$ について説明する．受信信号 $y_m(t)$ は m 番目のアレーアンテナ素子での到来波 $x_m(t)$ と m 番目のアレーアンテナ素子で発生する内部雑音 $w_m(t)$ の和である．

$$\begin{aligned} y_m(t) &= x_m(t) + w_m(t) \\ &= \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(m-1)d\sin(\theta)} x(t) + w_m(t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

これより，M 素子アレーアンテナの入力ベクトル $\boldsymbol{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_M(t)]^T$ は，次のようになる．

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{a}(\theta)x(t) + \boldsymbol{w}(t) \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{a}(\theta) = \left[1, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta}, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}2d\sin\theta}, \ldots, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(M-1)d\sin\theta}\right]^T \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \ldots, w_M(t)]^T \tag{2.11}$$

ここで，$[\cdot]^T$ は転置を表す．また，ベクトル $\boldsymbol{a}(\theta)$ は方向ベクトルと呼ばれる．さらに，各アンテナで発生する内部雑音 $w_m(t)$ は白色ガウス雑音であり，$w_m(t), w_{m'}(t)\,(m \neq m';\ m, m' = 1, 2, \ldots, M)$ は互いに無相関であるとする．

これまでは，到来波が 1 波と仮定していたが，図 2.2 のように複数の到来波がアレーアンテナに到来する場合を考える．互いに無相関な $P(>1)$ 個の到来波 $\boldsymbol{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \ldots, s_P(t)]^T$ が方向 $\theta_p\,(p = 1, 2, \ldots, P)$ からアレーアンテナに到来する場合を考える．このとき，m 番目のアレーアンテナ素子の受信信号 $y_m(t)$ は以下のようになる．

$$y_m(t) = \sum_{p=1}^{P} \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(m-1)d\sin\theta_p} s_p(t) + w_m(t) \tag{2.12}$$

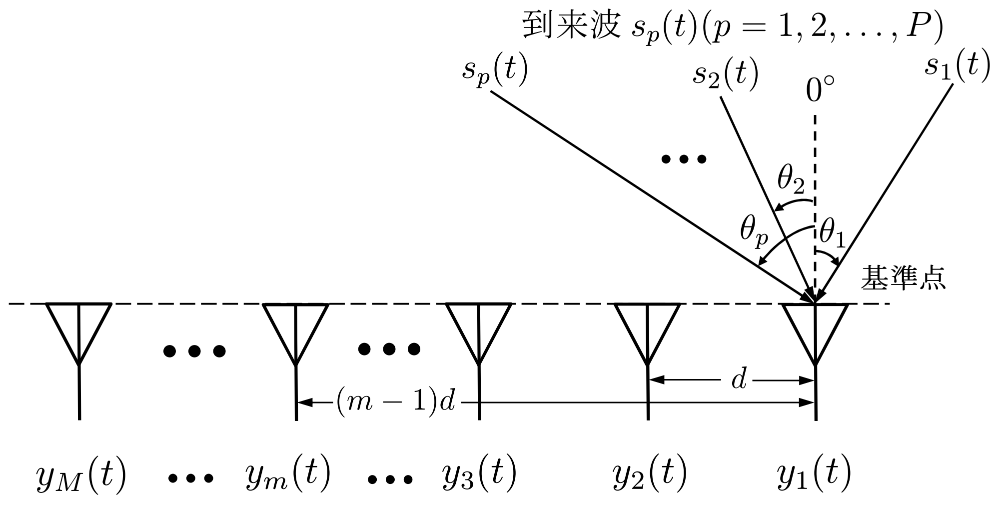


図 2.2: M 素子の一様線形アレーアンテナ（P 波が到来）

従って，アレーアンテナの入力ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ は次のようになる．

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{w}(t) \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}(\theta_1), \boldsymbol{a}(\theta_2), \ldots, \boldsymbol{a}(\theta_P)] \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \ldots, s_P(t)]^T \tag{2.15}$$

ここで，$\boldsymbol{A}$ は $M \times P$ 行列で，方向行列と呼ばれる．また，$\boldsymbol{s}(t)$ は到来波の信号ベクトルであり，$s_p(t)\,(p=1,2,\ldots,P)$ は時刻 t に基準点で受信した p 番目の到来波の信号を表す．式 (2.13) により，アレーアンテナの受信信号ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ は方向行列 $\boldsymbol{A}$, 到来波の信号ベクトル $\boldsymbol{s}(t)$ 及び内部雑音ベクトル $\boldsymbol{w}(t)$ で表すことができる．実際の $\boldsymbol{y}(t)$ の値はアレーアンテナより取得することは可能だが，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{s}(t)$ と $\boldsymbol{w}(t)$ の値は未知である．シミュレーション等では，アンテナの受信信号を作成する際に，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{s}(t)$ と $\boldsymbol{w}(t)$ を作成してから式 (2.13) を用いて $\boldsymbol{y}(t)$ を作成することが多い．

ここで，方向行列 $\boldsymbol{A}$ について説明する．到来方向 $\theta_p\,(p=1,2,\ldots,P)$ は全て異なるものとすると，式 (2.10) 及び式 (2.14) により，方向行列 $\boldsymbol{A}$ は $M \times P$ ヴァンデルモンド行列 [32] となる．$P \leq M$ と仮定すると，行列 $\boldsymbol{A}$ の最初の P 行の部分

行列 $\boldsymbol{A}'$ を取り出すと，行列 $\boldsymbol{A}'$ は次のようになる．

$$\boldsymbol{A}' = \left[\boldsymbol{a}'(\theta_1), \boldsymbol{a}'(\theta_2), \ldots, \boldsymbol{a}'(\theta_P)\right] \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{a}'(\theta) = \left[1, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta}, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}2d\sin\theta}, \ldots, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(P-1)d\sin\theta}\right]^T \tag{2.17}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} &= [b_1, b_2, \ldots, b_P] \\ &= \left[\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_1}, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_2}, \ldots, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_P}\right]\end{aligned} \tag{2.18}$$

とすると，行列 $\boldsymbol{A}'$ の (q, r) 成分 $A'(q, r)$ は以下のように表すことができる．

$$A'(q, r) = (b_r)^q,\ 1 \leq q, r \leq P \tag{2.19}$$

ヴァンデルモンドの行列式 [34] より，行列 $\boldsymbol{A}'$ の行列式は以下のようになる．

$$\det(\boldsymbol{A}') = \prod_{1\leq q<r\leq P}(b_q - b_r) \tag{2.20}$$

ここで，到来方向 $\theta_p\,(p = 1, 2\ldots, P)$ が全て異なると仮定しているため，$q \neq r$ に対して $\theta_q \neq \theta_r$ である．このとき，$\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_q} \neq \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_r}$ となることを示す．もし，逆に

$$\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_q} = \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_r} \tag{2.21}$$

と仮定すると，次の式が得られる．

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_q = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_r + 2m\pi,\ m : \text{整数} \tag{2.22}$$

すなわち，

$$\sin\theta_q = \sin\theta_r + \frac{m\lambda}{d} \tag{2.23}$$

となる．ここで，アレーの素子間隔 d を到来波の半波長とする．その理由は，前章の図 1.3 に説明したアレーアンテナの指向性パターンに関連する．素子間隔は大

きい場合には，電波が到来していない方向でもメインローブの虚像であるグレーティングローブ（Grating lobe）が発生しやすくなり，到来方向を正しく推定できない問題がある [32]．この現象はエイリアシング（Aliasing）とも呼ばれる．そのため，最適な素子間隔は半波長となり，実際にも素子間隔は半波長とすることが多い．そのため，$d = \frac{\lambda}{2}$ とすると，上の式 (2.23) は次のようになる．

$$m = \frac{\sin\theta_q - \sin\theta_r}{2} \tag{2.24}$$

ここで，$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_q, \theta_r \leq \frac{\pi}{2}$ により，$-1 \leq \sin\theta_q, \sin\theta_r \leq 1$ であることと，m は整数であることから，上の式が成り立つならば，$m = -1, 0, 1$ のいずれかとなる．$m = \pm 1$ の場合，$\sin\theta_q = \pm 1, \sin\theta_r = \mp 1$ となるので，$\theta_q = \pm\frac{\pi}{2}, \theta_r = \mp\frac{\pi}{2}$ となる．$m = 0$ の場合，$\sin\theta_q = \sin\theta_r$ となるので，$\theta_q = \theta_r$ となる．このため，$\sin\theta_q = \sin\theta_r$ となるのは，$\theta_q = \theta_r$ または $\theta_q = \pm\frac{\pi}{2}, \theta_r = \mp\frac{\pi}{2}$ のときのみとなる．

実際に，エンドファイア方向（$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$）から電波が到来した場合には，到来方向の推定が困難であるため，$-\frac{\pi}{2} < \theta_q, \theta_r < \frac{\pi}{2}$ とする．これより，$\theta_q \neq \theta_r$ のとき，$\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_q} \neq \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_r}$ となる．このとき，式 (2.20) により $\det(\boldsymbol{A}') \neq 0$ なので，行列 $\boldsymbol{A}'$ は正則行列であり，列ベクトルは一次独立となる．一次独立とは，ある複数のベクトル $\boldsymbol{v}_n\,(n = 1, \ldots, N)$ と複数の係数 $k_n\,(n = 1, \ldots, N)$ に対して $k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_N\boldsymbol{v}_N = 0$ が成り立つのが，$k_1 = k_2 = \cdots = k_N = 0$ のときに限る場合をいう．また，行列 $\boldsymbol{A}'$ のランク（$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}')$ と記述する）は行列 $\boldsymbol{A}'$ の列ベクトルが一次独立となる最大の列数と等しいので，$\boldsymbol{A}'$ のランクが P となる [36]．このことにより，方向行列 $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルも一次独立となり，ランクは列数と等しく P となる．$M \times P$ 次の行列 $\boldsymbol{A}$ が，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \min(M, P)$ を満たすとき，$\boldsymbol{A}$ はフルランク行列と呼ばれる．$\boldsymbol{A}$ はフルランク行列となることが分かる．

アレーアンテナの入力信号に対して到来方向を推定する際，アレーアンテナの入力信号 $\boldsymbol{y}(t)$ が時間的に変化するので，統計的な取扱いが必要となる．そこで，アレーアンテナの各アンテナ素子間の位相差を表す行列として受信信号の相関行列

を利用する．相関行列は以下の式で定義される．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= E\left[\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^H(t)\right] && (2.25)\\
&= \begin{bmatrix} E\left[y_1(t){y_1}^*(t)\right] & E\left[y_1(t){y_2}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_1(t){y_M}^*(t)\right] \\ E\left[y_2(t){y_1}^*(t)\right] & E\left[y_2(t){y_2}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_2(t){y_M}^*(t)\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left[y_M(t){y_1}^*(t)\right] & E\left[y_M(t){y_2}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_M(t){y_M}^*(t)\right] \end{bmatrix} && (2.26)
\end{aligned}
$$

ここで，$\boldsymbol{R}$ は M 次正方行列であり，$E[\cdot]$ はアンサンブル平均（期待値），$(\cdot)^H$ は複素共役転置，$(\cdot)^*$ は複素共役を表す．アンサンブル平均とは，同一条件下において，ある特定の時点における多数の測定値の平均のことである．一方で，時間平均とは，ある時間帯における多数の測定値の平均のことである．このアンサンブル平均と時間平均が等しくなる性質をエルゴード性といい，受信信号がエルゴード性を満たすと仮定し，式 (2.25) を時間平均により求めることとする．観測時間帯におけるサンプリング数（スナップショット数と言う）を K とすると，式 (2.25) を次式による時間平均により求める．

$$
\boldsymbol{R} = \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{K}\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^H(t) \tag{2.27}
$$

このとき，t は時刻ではなく，t 番目のスナップショットとなる．また，方向行列 $\boldsymbol{A}$ は t によらないことに注意し，式 (2.13) を式 (2.25) に代入すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= E\left[\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{w}(t)\right)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{w}(t)\right)^H\right] \\
&= E\left[\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{w}(t)\right)\left(\boldsymbol{s}^H(t)\boldsymbol{A}^H+\boldsymbol{w}^H(t)\right)\right] \qquad (2.28)\\
&= E\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^H(t)\boldsymbol{A}^H\right]+E\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{w}^H(t)\right]+E\left[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{s}^H(t)\boldsymbol{A}^H\right]+E\left[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^H(t)\right] \\
&= \boldsymbol{A}E\left[\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^H(t)\right]\boldsymbol{A}^H+\boldsymbol{A}E\left[\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{w}^H(t)\right]+E\left[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{s}^H(t)\right]\boldsymbol{A}^H+E\left[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^H(t)\right]
\end{aligned}
$$

ここで，内部雑音電力を ρ^2 とし，全てのアンテナ素子において内部雑音電力が等しいと仮定する．各素子間の内部雑音は無相関であると仮定しているため，$E\left[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^H(t)\right]$ は M 次の対角行列で，対角成分が ρ^2 であり，その他の全ての成分が 0 となる．$\boldsymbol{I}_M$

を M 次単位行列とすると，$E\left[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^H(t)\right] = \rho^2\boldsymbol{I}_M$ となる．また，到来信号と内部雑音が無相関であると仮定すると，$E\left[\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{w}^H(t)\right] = 0$，$E\left[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{s}^H(t)\right] = 0$ となる．ここで，$E\left[\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^H(t)\right] = \boldsymbol{C}$ と置く．$\boldsymbol{C}$ は到来波の自己相関行列と呼ばれる．式 (2.25) は以下のようになる．

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^H + \rho^2\boldsymbol{I}_M \tag{2.29}$$

式 (2.29) の右辺に注目すると，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \rho$ は全て未知であるため，実際には式 (2.29) は数式の導出やシミュレーションに利用されることが多く，測定値として相関行列 $\boldsymbol{R}$ を求める際は，式 (2.27) を用いるので，注意する必要がある．

2.2　従来の到来方向推定法の概要

ここで，前節で説明したアレーアンテナ及び信号モデルに基づいて，図 2.2 のように M 素子の一様線形アレーアンテナに $P\,(\geq 1)$ 個の到来波が入射すると仮定し，従来の到来方向推定法である MUSIC 法について説明を行う．

2.2.1　MUSIC 法

MUSIC 法 [4] は，アレーの受信信号の相関行列の固有値と固有ベクトルを分解した後，熱雑音電力に等しい固有値に対応する固有ベクトルの全てが到来波の方向ベクトルと直交することを利用して，角度スペクトラムを求め，これのピークサーチにより到来方向を推定する手法である．MUSIC 法では，到来波は全て互いに無相関であることと，到来波数 P が既知で，アレー素子数 M 未満，つまり $P \leq M - 1$ であることが前提条件である．

前節のように，アレーアンテナの相関行列は以下のようになる．

$$\boldsymbol{R} = E\left\{\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^H(t)\right\} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^H + \rho^2\boldsymbol{I}_M \tag{2.30}$$

また，到来波は全て互いに無相関であることに注意し，式 (2.25) 及び式 (2.26) を用いると，到来波の自己相関行列 $\boldsymbol{C}$ は以下のように表すことができる．

$$\boldsymbol{C} = E\left[\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^H(t)\right] \tag{2.31}$$

$$= \begin{bmatrix} E\left[s_1(t){s_1}^*(t)\right] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E\left[s_2(t){s_2}^*(t)\right] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E\left[s_P(t){s_P}^*(t)\right] \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

これにより，行列 $\boldsymbol{C}$ は対角行列となり，ランクが P となることが分かる．一般的な行列 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に対して成り立つ次の式

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{XY}) \leq \min\bigl(\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}), \mathrm{rank}(\boldsymbol{Y})\bigr) \tag{2.33}$$

を利用すると，

$$\mathrm{rank}\bigl(\boldsymbol{ACA}^H\bigr) = \mathrm{rank}\bigl((\boldsymbol{AC})\boldsymbol{A}^H\bigr) \leq \min\bigl(\mathrm{rank}(\boldsymbol{AC}), \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^H)\bigr) \tag{2.34}$$

$$\leq \min\bigl(\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}), \mathrm{rank}(\boldsymbol{C}), \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^H)\bigr) \tag{2.35}$$

となるので，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{ACA}^H) \leq P$ となる．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{C}$ が共にフルランクでランクが P なので，行列 $\boldsymbol{ACA}^H$ のランクは P となる．ここで，$\boldsymbol{z}$ を任意の複素数の要素からなる $M \times 1$ のベクトルとすると，

$$\boldsymbol{z}^H\boldsymbol{ACA}^H\boldsymbol{z} = E\left\{\boldsymbol{z}^H\boldsymbol{As}(t)\boldsymbol{s}(t)^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{z}\right\} = E\left\{\|\boldsymbol{z}^H\boldsymbol{As}(t)\|^2\right\} \geq 0 \tag{2.36}$$

が成り立つ．ここで，$\|\cdot\|$ はユークリッドノルムで，$\boldsymbol{r} = [r_1, r_2, \ldots, r_M]^T$ が縦ベクトル（列ベクトルとも呼ばれる）の場合，ユークリッドノルムは以下のようになる．

$$\|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{\boldsymbol{r}^H\boldsymbol{r}} = \sqrt{|r_1|^2 + |r_2|^2 + \cdots + |r_M|^2} \tag{2.37}$$

ここで，$|\cdot|$ は絶対値を表す．式 (2.36) を満たす行列 $\boldsymbol{ACA}^H$ は，非負定値エルミート行列と呼ばれる．この行列の固有値を $\lambda_i\,(i = 1, 2, \ldots, M)$ とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ で表すと

$$\boldsymbol{ACA}^H\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i \tag{2.38}$$

となり，行列 $\boldsymbol{ACA}^H$ が非負定値エルミート行列であり，また，ランクが P であるため，固有値は実数で次の関係を持つ．

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_P > \lambda_{P+1} = \lambda_{P+2} = \cdots = \lambda_M = 0 \tag{2.39}$$

また，対応する固有ベクトルは次の式を満たす．

$$\boldsymbol{v}_i^H \boldsymbol{v}_k = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{2.40}$$

ここで，$\delta_{i,k}$ はクロネッカーのデルタである．このことから，異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する（ベクトルの内積が 0 となる）ことが分かる．

同様に，相関行列 $\boldsymbol{R}$ の場合は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_i &= (\boldsymbol{ACA}^H + \rho^2 \boldsymbol{I}_M)\boldsymbol{v}_i \\ &= \boldsymbol{ACA}^H \boldsymbol{v}_i + \rho^2 \boldsymbol{v}_i \\ &= \lambda_i \boldsymbol{v}_i + \rho^2 \boldsymbol{v}_i \\ &= (\lambda_i + \rho^2)\boldsymbol{v}_i,\ i = 1, 2, \ldots, M \end{aligned} \tag{2.41}$$

となる．これらの固有値は，内部雑音がないときの相関行列 $\boldsymbol{R}$ の固有値に内部雑音の電力が上乗せされただけで，固有ベクトルは内部雑音の有無には無関係であることが分かる．行列 $\boldsymbol{R}$ の固有値を λ'_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ とすると，行列 $\boldsymbol{ACA}^H$ の固有値と内部雑音の電力との関係は

$$\lambda'_i = \lambda_i + \rho^2 \tag{2.42}$$

となり，以下の関係が成り立つ．

$$\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \cdots \geq \lambda'_P > \lambda'_{P+1} = \lambda'_{P+2} = \cdots = \lambda'_M = \rho^2 > 0 \tag{2.43}$$

上の式 (2.43) より，固有値が下降する順に並び替えると，最初の P 個の固有値は雑音電力 ρ^2 より大きく，残りの $(M - P)$ 個の固有値が ρ^2 と等しい，これらの固有値及び対応する固有ベクトルに注目すると，以下の式が得られる．

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_i = \lambda'_i \boldsymbol{v}_i = \rho^2 \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{ACA}^H \boldsymbol{v}_i + \rho^2 \boldsymbol{v}_i,\ i = P + 1, \ldots, M \tag{2.44}$$

従って，次の式が導かれる．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{v}_i = 0,\ i = P+1,\ldots,M \tag{2.45}$$

式 (2.45) の左辺に注目すると，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{v}_i$ を $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{v}_i)$ に書き換えることができる．ここで，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ は $M \times P$ 次の行列であるため，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_P]$ と置くことができる．また，$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{v}_i$ は $P \times 1$ の縦ベクトルで，$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{v}_i = [c_{i1},\ldots,c_{iP}]^T$ と置くと，式 (2.45) は次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{v}_i = c_{i1}\boldsymbol{r}_1 + \cdots + c_{iP}\boldsymbol{r}_P = 0,\ i = P+1,\ldots,M \tag{2.46}$$

ここで，行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{C}$ がともにフルランクで，ランクが P となるため，行列 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ のランクが P となりフルランクである．そのため，行列 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ の全ての列ベクトル $\boldsymbol{r}_p\,(p = 1,\ldots,L)$ が一次独立となるので，$c_{i1} = \cdots = c_{iP} = 0$ となり，次の式が得られる．

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{v}_i = 0,\ i = P+1,\ldots,M \tag{2.47}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{a}^H(\theta_p)\boldsymbol{v}_i = 0,\ p = 1,2,\ldots,P;\ i = P+1,\ldots,M \tag{2.48}$$

となる．これより，熱雑音電力に等しい相関行列の固有値に対応する固有ベクトルは全て方向ベクトルと直交することが分かる．

ここで，固有ベクトルと方向ベクトルの関係について考える．式 (2.40) での固有ベクトル $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_M\}$ は一次独立で互いに直交するので，固有ベクトル $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_M\}$ は M 次元空間の正規直交基底とすることができる．この M 次元空間は以下のような 2 つの部分空間に分けることができる．

$$\mathcal{S} = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_P\} \tag{2.49}$$

$$\mathcal{N} = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{v}_{P+1},\boldsymbol{v}_{P+2},\ldots,\boldsymbol{v}_M\} \tag{2.50}$$

ここで，$\mathrm{span}\{\cdot\}$ は $\{\cdot\}$ を含む各列ベクトルにより張られた部分空間を表す．$\mathcal{S}$ と $\mathcal{N}$ をそれぞれ P 次元の信号部分空間（Signal subspace）と $(M-P)$ 次元の雑音部分空間（Noise subspace）と呼ばれ，$\mathcal{S}$ と $\mathcal{N}$ は互いに直交する関係がある．また，式 (2.48) より，方向ベクトルにより張られた P 次元の部分空間

$$\mathcal{A} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}(\theta_1), \boldsymbol{a}(\theta_2), \ldots, \boldsymbol{a}(\theta_P)\} \tag{2.51}$$

も雑音部分空間 $\mathcal{N}$ と直交する．$\mathcal{A}$ と $\mathcal{S}$ は同じ P 次元で，また共に $\mathcal{N}$ と直交するので，以下の関係が成り立つ．

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \tag{2.52}$$

すなわち，P 個の固有ベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_P\}$ と P 個の方向ベクトル $\{\boldsymbol{a}(\theta_1), \boldsymbol{a}(\theta_2), \ldots, \boldsymbol{a}(\theta_P)\}$ は同じ空間にある．

次に，到来方向推定について説明する．ここで，行列 $\boldsymbol{E}_N$ を

$$\boldsymbol{E}_N = [\boldsymbol{v}_{P+1}, \boldsymbol{v}_{P+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_M] \tag{2.53}$$

と置くと，式 (2.48) は以下のように表すことができる．

$$\boldsymbol{a}^H(\theta_p)\boldsymbol{E}_N = 0,\ p = 1, 2, \ldots, P \tag{2.54}$$

本来ならば，式 (2.54) が 0 となる解を求めれば，到来方向を推定することができる．しかし，**2.1.2** に説明したように，相関行列 $\boldsymbol{R}$ は，式 (2.27) より求められるため，$\boldsymbol{a}^H(\theta_p)\boldsymbol{E}_N$ は 0 にならない．ベクトル $\boldsymbol{a}^H(\theta_p)\boldsymbol{E}_N$ の長さについて考えると，この長さは 0 に近い値となる．複素数の横ベクトル $\boldsymbol{a}^H(\theta_p)\boldsymbol{E}_N$ の長さは以下の式のように求められる．

$$\|\boldsymbol{a}^H(\theta_p)\boldsymbol{E}_N\|^2 = \boldsymbol{a}^H(\theta_p)\boldsymbol{E}_N\boldsymbol{E}_N^H\boldsymbol{a}(\theta_p) \simeq 0 \tag{2.55}$$

式 (2.55) を用いて，以下のようにスペクトラム関数 $\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ が得られ，これは MUSIC 法による MUSIC スペクトラムと定義される．

$$\mathcal{P}_{MU}(\theta) = \frac{1}{\boldsymbol{a}^H(\theta)\boldsymbol{E}_N\boldsymbol{E}_N^H\boldsymbol{a}(\theta)} \tag{2.56}$$

角度 θ を -90° から 90° まで変化させたときの $\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ を求めると，$\theta = \theta_p$ のときに $\mathcal{P}_{MU}(\theta) = \mathcal{P}_{MU}(\theta_p)$ が無限大に近い大きい値となる（ピークと呼ぶ）ので，そのピークとなる角度 θ を到来方向として推定する．アレーアンテナの方位に対する受信感度が異なるため，式 (2.56) の $\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ に $\boldsymbol{a}^H(\theta)\boldsymbol{a}(\theta)$ を掛けて正規化し，次式としたものが多く用いられている．

$$\mathcal{P}_{MU}(\theta) = \frac{\boldsymbol{a}^H(\theta)\boldsymbol{a}(\theta)}{\boldsymbol{a}^H(\theta)\boldsymbol{E}_N\boldsymbol{E}_N^H\boldsymbol{a}(\theta)} \tag{2.57}$$

式 (2.56) 及び式 (2.57) により，$\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ を求めるためには，$\boldsymbol{E}_N$ を求める必要がある．$\boldsymbol{E}_N = [\boldsymbol{v}_{P+1}, \boldsymbol{v}_{P+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_M]$ として求めるには，到来波数 P の情報が必要であり，また $P \leq M-1$ が必要となる．つまり，MUSIC 法では，到来波数情報が既知である必要があり，またアレー素子数未満の到来波のみ対応可能となる．

以上の MUSIC 法のアルゴリズムを以下にまとめる．

1. 受信信号 $\boldsymbol{y}(t)$ から相関行列 $\boldsymbol{R}$ を式 (2.27) により求める．
2. $\boldsymbol{R}$ を固有値分解し，固有値を下降順に並び替え，$(P+1)$ 番目以降の固有値に対応する固有ベクトルを用いて，式 (2.53) により $\boldsymbol{E}_N$ を求める．
3. 式 (2.57) により $\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ を求め，$\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ のピークにより到来方向を推定する．

第3章　未知の到来波数に対する到来波の方向推定

第 **1** 章で説明したように，本章では本研究の課題とした未知の到来波数に対する高精度な到来方向推定を述べる．まず，Qian らによる手法（Qian 手法）について説明して，その後，Qian 手法を改良し，雑音が大きい場合とスナップショット数が少ない場合において，相関波が存在する環境下で到来波数情報がなくても到来方向を高精度に推定する Qian 手法の改良法を提案する．

3.1　Qian 手法とその問題点

ここでは，Qian 手法のアルゴリズム及び問題点について説明する．

3.1.1　アレーアンテナと信号のモデル

図 3.1 のように，無指向性の $(2M+1)$ 素子の一様線形アレーアンテナを考える．このアレーアンテナの左から右の方向に対して，アンテナ素子の番号を $-M$ 番から M 番とする．そのため，0 番目の素子は中央となり，これを基準点とすると，アレーは 0 番目の素子に関して対称となるので，この形のアレーは中心対称と呼ばれる．アンテナ素子の間隔を d とし，垂直線と到来波の入射する方向となる角度を到来方向とし，時計周りを正とする．このアレーアンテナに無限遠にある波源から $P\,(\leq M+1)$ 個の到来波 $s_p(t)\,(p=1,2,\ldots,P)$ が波長 $\lambda=2d$ で, それぞれの到来方向 $\theta_p(p=1,\ldots,P)$ から到来する場合を考える．スナップショット数を K，そして $t=1,\ldots,K$ をスナップショットの番号とする．このとき，$m\,(=-M,\ldots,M)$ 番目の素子の受信信号の解析信号は，**2.1.2** の式 (2.12) と同様に次式のようになる．

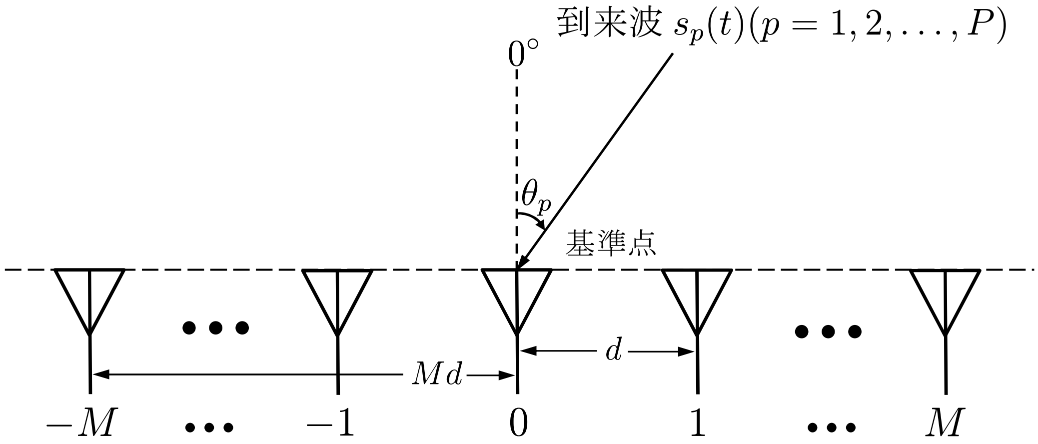


図 3.1: $(2M+1)$ 素子の一様線形アレーアンテナに到来する到来波

$$y_m(t) = \sum_{p=1}^{P} s_p(t) \mathrm{e}^{-j\pi m \sin\theta_p} + w_m(t) \tag{3.1}$$

ここで，$w_m(t)$ を m 番目のアンテナ素子で発生する内部雑音の白色ガウス雑音とし，互いに無相関であるとする．P 個の到来波の内，最初の $Q\,(\leq P)$ 個の到来波が位相のみ異なる相関波と仮定し，その他の到来波と互いに無相関であると仮定する．このため，第 1 番目の到来波の $s_1(t)$ を用いて，この Q 個の相関波を表すことができる．ここで，$p\,(p = 1, 2, \ldots, Q)$ 波目と到来波 $s_1(t)$ に対する振幅と位相ずれのそれぞれを $\alpha_p\,(\alpha_1 = 1)$ と $\phi_p\,(\phi_1 = 0)$ とし，$\beta_p = \alpha_p \mathrm{e}^{-j\phi_p}$ とすると，p 波目は以下の式で表せる．

$$s_p(t) = \alpha_p \mathrm{e}^{-j\phi_p} s_1(t) = \beta_p s_1(t),\ p = 1, 2, \ldots, Q \tag{3.2}$$

式 (3.2) を用いると，式 (3.1) は次のようになる．

$$y_m(t) = s_1(t) \sum_{p=1}^{Q} \beta_p \mathrm{e}^{-j\pi m \sin\theta_p} + \sum_{p=Q+1}^{P} s_p(t) \mathrm{e}^{-j\pi m \sin\theta_p} + w_m(t) \tag{3.3}$$

これより，アレーアンテナの受信信号ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ は次のようになる．

$$\boldsymbol{y}(t) = [y_{-M}(t), \ldots, y_0(t), \ldots, y_M(t)]^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{w}(t) \tag{3.4}$$

ここで，$\boldsymbol{s}(t)$ は到来波の信号ベクトル，$\boldsymbol{A}$ はアレーの方向行列，$\boldsymbol{a}(\theta)$ はアレーの方向ベクトル，$\boldsymbol{w}(t)$ はアレーの内部雑音ベクトルであり，次のようになる．

$$\boldsymbol{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \ldots, s_P(t)]^T = [\beta_1 s_1(t), \ldots, \beta_Q s_1(t), s_{Q+1}(t), \ldots, s_P(t)]^T \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}(\theta_1), \boldsymbol{a}(\theta_2), \ldots, \boldsymbol{a}(\theta_P)] \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{a}(\theta) = \left[\mathrm{e}^{j\pi M \sin\theta}, \mathrm{e}^{j\pi(M-1)\sin\theta}, \ldots, 1, \ldots, \mathrm{e}^{-j\pi(M-1)\sin\theta}, \mathrm{e}^{-j\pi M \sin\theta}\right]^T \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{w}(t) = \left[w_{-M}(t), w_{-(M-1)}(t), \ldots, 0, \ldots, w_{(M-1)}(t), w_M(t)\right]^T \tag{3.8}$$

3.1.2 Qian 手法

ここでは，Qian 手法 [22] による到来方向推定について説明する．式 (3.4) のアレーの受信信号ベクトルを用いて以下のように $(2M+1)$ 次の相関行列 $\boldsymbol{R}$ を求める．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= E\left[\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^H(t)\right] \qquad (3.9)\\
&= \begin{bmatrix}
E\left[y_{\text{-}M}(t)y_{\text{-}M}{}^*(t)\right] & E\left[y_{\text{-}M}(t)y_{\text{-}(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_{\text{-}M}(t)y_M{}^*(t)\right] \\
E\left[y_{\text{-}(M\text{-}1)}(t)y_{\text{-}M}{}^*(t)\right] & E\left[y_{\text{-}(M\text{-}1)}(t)y_{\text{-}(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_{\text{-}(M\text{-}1)}(t)y_M{}^*(t)\right] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
E\left[y_M(t)y_{\text{-}M}{}^*(t)\right] & E\left[y_M(t)y_{\text{-}(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_M(t)y_M{}^*(t)\right]
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

相関行列 $\boldsymbol{R}$ の $(M+1)$ 番目の行を 0 行目とすると，$\boldsymbol{R}$ の各行成分の番号は $-M$ から M の順となる．また，$\boldsymbol{R}$ の (m,n) 成分を $R(m,n)$ とすると，$R(m,n)$ は以下のようになる．

$$R(m,n) = E\left[y_m(t)y_n^*(t)\right],\ m,n = -M,\ldots,0,\ldots,M \tag{3.10}$$

式 (3.3) を式 (3.10) に代入すると，[20] の結果により $R(m,n)$ は以下のようになる．

$$R(m,n) = \sum_{p=1}^{P} \psi_{m,p}\mathrm{e}^{j\pi n \sin\theta_p} + \rho^2\delta_{m,n},\ m,n = -M,\ldots,0,\ldots,M \tag{3.11}$$

$$\psi_{m,p} = \begin{cases} S_{1,1}\beta_p^* \sum_{k=1}^{Q} \beta_k \mathrm{e}^{-j\pi m \sin\theta_k},\ p = 1,\ldots,Q \\ S_{p,p}\mathrm{e}^{-j\pi m \sin\theta_p},\ p = Q+1,\ldots,P \end{cases} \tag{3.12}$$

$$S_{k,p} = \mathbb{E}\left\{s_k(t)s_p^*(t)\right\},\ k,p = 1, Q+1,\ldots,P \tag{3.13}$$

ここで，$\psi_{m,p}$ は p 番目の到来波の自己相関を m 素子分に対応する位相だけずらした量とし，ρ^2 は雑音電力とし，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーデルタであり，$S_{k,p}$ は k 番目と p 番目の到来波の相関とする．$\boldsymbol{R}$ の $m\,(m=-M,\ldots,0,\ldots,M)$ 行目を $\boldsymbol{R}(m,:)$ とし，この m 行目の全ての成分を用いて，対応するテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ を作成する．テプリッツ行列は，それぞれの対角線に載っている成分の値は全て同じとなる行列である．$\boldsymbol{R}_m$ は以下になる．

$$\boldsymbol{R}_m = \begin{bmatrix} R(m,0) & R(m,1) & \cdots & R(m,M) \\ R(m,-1) & R(m,0) & \cdots & R(m,M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(m,-M) & R(m,-M+1) & \cdots & R(m,0) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$= \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Psi}_m\bar{\boldsymbol{A}}^H + \rho^2\boldsymbol{I}_{M+1,m} \in \mathbb{C}^{(M+1)(M+1)} \tag{3.15}$$

ここで，$\boldsymbol{\Psi}_m = \mathrm{diag}\{\psi_{m,1},\ldots,\psi_{m,P}\}$ は P 次の対角行列で対角成分 $\{\psi_{m,1},\ldots,\psi_{m,P}\}$ を持つ．そして，$\boldsymbol{I}_{M+1,m}$ は $(M+1)$ 次の正方行列で，m 番目の対角線の全ての成分が 1 であり，それ以外の全ての成分が 0 であるもので，以下の式で定義される．

$$\boldsymbol{I}_{M+1,m}(k,l) = \delta_{k,l-m},\ \ k,l=1,\ldots,M+1 \tag{3.16}$$

また，$\bar{\boldsymbol{A}} = [\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_1),\ldots,\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_P)]$ は方向行列 $\boldsymbol{A}$ の部分行列で $(M+1)\times P$ 次方向行列である．$\bar{\boldsymbol{a}}(\theta) = [1,\ldots,\mathrm{e}^{-j\pi(M-1)\sin\theta},\mathrm{e}^{-j\pi M\sin\theta}]^T$ であり，方向ベクトル $\boldsymbol{a}(\theta)$ の一部である．

式 (3.16) により，$m=0$ のときのみ行列 $\boldsymbol{I}_{M+1,m}$ が単位行列であり，それ以外の $m\neq 0$ のときには，$\boldsymbol{I}_{M+1,m}$ は単位行列でなくなってしまうため，式 (3.15) より到来方向情報を持つテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ の固有ベクトルは，雑音の有無に依存してしまう．Qian らは雑音が無視できるほど十分小さいと考え，テプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ を以下の式としている．

$$\boldsymbol{R}_m = \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Psi}_m\bar{\boldsymbol{A}}^H = \sum_{p=1}^{P}\psi_{m,p}\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_p)\bar{\boldsymbol{a}}^H(\theta_p) \tag{3.17}$$

式 (3.17) により，各テプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ が $\bar{\boldsymbol{A}}$ により同時対角化可能であるため，$\boldsymbol{R}_m$ と $\bar{\boldsymbol{A}}$ が同じ列空間を張るため $\mathrm{span}\{\boldsymbol{R}_m\} = \mathrm{span}\left\{\bar{\boldsymbol{A}}\right\}$ となる．受信信号の

相関行列 $\boldsymbol{R}$ の $-m$ 行目 $\boldsymbol{R}(-m,:)$ と m 行目 $\boldsymbol{R}(m,:)$ が複素共役対称であるため，$\boldsymbol{R}(-m,:) = \boldsymbol{R}^*(m,:)\boldsymbol{J}$ となる．ここで，$\boldsymbol{J}$ は交換行列であり，反対角線の全ての成分が 1 でそれ以外の全ての成分が 0 である．これにより，$\boldsymbol{R}(-m,:)$ と $\boldsymbol{R}(m,:)$ が同じ統計的な到来方向の情報を持つため，全ての $(2M+1)$ 個のテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ の中で，最初の $(M+1)$ 行成分に対応する $(M+1)$ 個のみのテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ だけが，異なる統計的な到来方向の情報を持つ．このため，最初の $(M+1)$ 行のみを利用して $(M+1)$ 個のテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ を作成し，これらのテプリッツ行列を用いて，方向行列 $\bar{\boldsymbol{A}}$ の列空間を求めることで，到来方向を推定することができる．ここで，$k\,(k=1,\ldots,P)$ 番目の到来波に対しては，以下のようなベクトル $\boldsymbol{b}_k \in \mathbb{C}^{(M+1)}$ がいつも存在する．

$$\boldsymbol{b}_k \perp \ \mathrm{span}\big\{[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_1),\ldots,\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_{k-1}),\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_{k+1}),\ldots,\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_P)]\big\} \tag{3.18}$$

式 (3.18) により，$\boldsymbol{b}_p$ は θ_p に対応する方向ベクトル $\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_p)$ を除いた残りの $(P-1)$ の方向ベクトルより張られた部分空間と直交する．従って，以下の式が得られる．

$$\bar{\boldsymbol{a}}^H(\theta_p)\boldsymbol{b}_k = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{a}}^H(\theta_p)\boldsymbol{b}_k, & p = k \\ 0, & p \neq k \end{cases} \tag{3.19}$$

式 (3.17) の両辺の右側から $\boldsymbol{b}_k$ を掛けて，式 (3.19) を用いると，次の式が得られる．

$$\boldsymbol{R}_m\boldsymbol{b}_k = \sum_{p=1}^{P} \psi_{m,p}\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_p)\bar{\boldsymbol{a}}^H(\theta_p)\boldsymbol{b}_k = g_{m,k}\bar{\boldsymbol{a}}(\theta_k) \tag{3.20}$$

ここで，$g_{m,k} = \psi_{m,k}\bar{\boldsymbol{a}}^H(\theta_k)\boldsymbol{b}_k$ である．式 (3.20) により，もし θ が真の到来方向であれば，以下の式が成り立つためのスカラー g_m が存在する．g_m は θ によって変化する値である．

$$\boldsymbol{R}_m\boldsymbol{b} = g_m\bar{\boldsymbol{a}}(\theta),\ -M \leq m \leq 0 \tag{3.21}$$

ここで，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{(M+1)}$ は縦ベクトルである．また，$\boldsymbol{g} = [g_{-M},\ldots,g_{-1},g_0]^T \in \mathbb{C}^{(M+1)}$ とすると，式 (3.21) から次の最小化問題に書き換えることができる．

$$\begin{aligned} \underset{\theta,\boldsymbol{b},\boldsymbol{g}}{\text{minimize}} \quad & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(\theta,\boldsymbol{b},\boldsymbol{g}) = \sum_{m=-M}^{0} \|\boldsymbol{R}_m\boldsymbol{b} - g_m\bar{\boldsymbol{a}}(\theta)\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \|\boldsymbol{g}\|^2 = 1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ここで，$\theta, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}$ は最適化されるパラメータとなる．$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{g}$ のどちらも未知のパラメータであるため，式 (3.22) を直接 $\theta, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}$ に対して最適解を求めることは困難である．そのため，式 (3.22) を次のように変形する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{b}) &= \sum_{m=-M}^{0} \left(\boldsymbol{R}_m \boldsymbol{b} - g_m \bar{\boldsymbol{a}}(\theta)\right)^H \left(\boldsymbol{R}_m \boldsymbol{b} - g_m \bar{\boldsymbol{a}}(\theta)\right) \\
&= \boldsymbol{b}^H \Big(\sum\nolimits_{m=-M}^{0} \boldsymbol{R}_m^H \boldsymbol{R}_m\Big) \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^H \Big(\sum\nolimits_{m=-M}^{0} g_m \boldsymbol{R}_m^H \bar{\boldsymbol{a}}(\theta)\Big) \\
&\quad - \Big(\sum\nolimits_{m=-M}^{0} g_m^* \bar{\boldsymbol{a}}^H(\theta) \boldsymbol{R}_m\Big) \boldsymbol{b} - \bar{\boldsymbol{a}}^H(\theta) \bar{\boldsymbol{a}}(\theta) \sum\nolimits_{m=-M}^{0} |g_m|^2
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

ここで，

$$
\boldsymbol{F} = \sum_{m=-M}^{0} \boldsymbol{R}_m^H \boldsymbol{R}_m \in \mathbb{C}^{(M+1)\times(M+1)} \tag{3.24}
$$

$$
\boldsymbol{G}(\theta) = \left[\boldsymbol{R}_{-M}^H \bar{\boldsymbol{a}}(\theta), \ldots, \boldsymbol{R}_0^H \bar{\boldsymbol{a}}(\theta)\right] \in \mathbb{C}^{(M+1)\times(M+1)} \tag{3.25}
$$

とおき，また，$\sum_{m=-M}^{0} |g_m|^2 = \|\boldsymbol{g}\|^2 = 1$ 及び $\bar{\boldsymbol{a}}^H(\theta)\bar{\boldsymbol{a}}(\theta) = M+1$ となることに注意すると，式 (3.23) は次のようになる．

$$
\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\theta, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{b}^H \boldsymbol{F} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^H \boldsymbol{G}(\theta) \boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}^H \boldsymbol{G}^H(\theta) \boldsymbol{b} + M + 1 \tag{3.26}
$$

式 (3.26) の最適解を求めるために，θ と $\boldsymbol{g}$ を固定して，$\boldsymbol{b}$ に対して偏微分を取ったものを 0 にすると，以下のようになる．

$$
\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Q}}(\theta, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = 2\Big(\boldsymbol{F}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{G}(\theta)\boldsymbol{g}\Big) = \boldsymbol{0}_{M+1} \tag{3.27}
$$

ここで，$\boldsymbol{0}_{M+1}$ は $(M+1)$ 要素のゼロベクトルで，全ての要素が 0 である．式 (3.27) より $\boldsymbol{b}$ の最適解が以下のように求められる．

$$
\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{F}^\dagger \boldsymbol{G}(\theta) \boldsymbol{g} \tag{3.28}
$$

ここで，$\boldsymbol{F}^\dagger$ は $\boldsymbol{F}$ の擬似逆行列である．式 (3.28) を式 (3.26) に代入すると，式 (3.22) の最小化問題は，以下のように簡単になる．

$$
\begin{aligned}
\underset{\theta, \boldsymbol{g}}{\text{minimize}} \quad & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(\theta, \boldsymbol{g}) = M + 1 - \boldsymbol{g}^H \boldsymbol{G}^H(\theta) \boldsymbol{F}^\dagger \boldsymbol{G}(\theta) \boldsymbol{g} \\
\text{subject to} \quad & \|\boldsymbol{g}\|^2 = 1
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

式 (3.29) の右辺に注目すると，$M+1$ は定数で不変のため，$\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\theta,\boldsymbol{g})$ の最小化を解くことは，$\boldsymbol{g}^H\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)\boldsymbol{g}$ の最大化を解くことになる．$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{G}(\theta)$ は $(M+1)$ 次正方行列であるため，$\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)$ は $(M+1)$ 次正方行列となる．この行列の固有値分解を行なうと，以下のようになる．

$$\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)=\sum_{m=1}^{M+1}\mu_m\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{u}_m^H \tag{3.30}$$

ここで，$\mu_m\,(m=1,\dots,M+1)$ は行列 $\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)$ の固有値であり，これらの固有値に対応する固有ベクトルが $\boldsymbol{u}_m\,(m=1,\dots,M+1)$ であり，最大の固有値を $\mu_{\max}$ とし，最大固有値に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_{\max}$ とする．そこで，行列 $\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)$ とベクトル $\boldsymbol{g}$ に対するレイリー商 $\boldsymbol{\mathcal{R}}$（Rayleigh quotient）[36] 及び最大の固有値 $\mu_{\max}$ は次の関係を持つ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\left(\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta),\boldsymbol{g}\right)}&=\frac{\boldsymbol{g}^H\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{g}^H\boldsymbol{g}}\\&=\frac{\boldsymbol{g}^H\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)\boldsymbol{g}}{\|\boldsymbol{g}\|^2}\\&=\boldsymbol{g}^H\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)\boldsymbol{g}\le\mu_{\max}\end{aligned} \tag{3.31}$$

これにより，$\boldsymbol{g}^H\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)\boldsymbol{g}$ の最大値は $\mu_{\max}$ となり，$\boldsymbol{g}$ は $\boldsymbol{u}_{\max}$ となる．このとき，式 (3.29) は次のようになる．

$$\underset{\theta}{\text{minimize}}\quad\boldsymbol{\mathcal{Q}}(\theta)=M+1-\max\operatorname{eig}\left\{\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)\right\} \tag{3.32}$$

ここで，$\max\operatorname{eig}\{\cdot\}$ は行列 $\{\cdot\}$ の最大の固有値を表す．式 (3.32) の右辺の逆数を用いて，以下のスペクトラム関数 $\mathcal{P}_{Qian}(\theta)$ を求める．

$$\mathcal{P}_{Qian}(\theta)=\frac{1}{M+1-\max\operatorname{eig}\{\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{G}(\theta)\}} \tag{3.33}$$

MUSIC 法と同様に，角度 θ を -90° から 90° まで変化させたときの $\mathcal{P}_{Qian}(\theta)$ を求め，$\mathcal{P}_{Qian}(\theta)$ がピークとなる角度 θ を到来方向と推定する．

以下に Qian 手法のアルゴリズムをまとめる．

1. 受信信号の相関行列 $\boldsymbol{R}\in\mathbb{C}^{(2M+1)\times(2M+1)}$ を求める．

2. 相関行列 $\boldsymbol{R}$ の最初の $(M+1)$ 行により，$(M+1)$ 個のテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m (m = -M, \ldots, 0)$ を作成し，式 (3.24) と式 (3.25) により行列 $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{G}(\theta)$ を求める．

3. 式 (3.33) によりスペクトラム関数 $\mathcal{P}_{Qian}(\theta)$ を求め，これのピークにより到来方向を推定する．

Qian 手法では，受信信号の相関行列 $\boldsymbol{R}$ の $-m\,(m = -M, \ldots, -1, 0)$ 行目 $\boldsymbol{R}(-m, :)$ と m 行目 $\boldsymbol{R}(m, :)$ が複素共役対称の関係を用いて，これらに対応するテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_{-m}$ と $\boldsymbol{R}_m$ は同じ到来方向の情報を持つと考えた．そのため，相関行列の全部ではなく，その約半分 ($(2M+1)$ 行の内の $(M+1)$ 行) の行のみ利用して到来方向を推定している．しかし，実際にはスナップショット数が有限であるため，第 1 の問題点としては，相関行列 $\boldsymbol{R}$ の $-m$ 行目と m 行目の複素共役対称性が崩れてしまうことがあげられる．従って，何らかの方法で相関行列の複素共役対称性を確保することが必要である．

次に，第 2 の問題点として，Qian 手法は，式 (3.15) のテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ の雑音を含む成分 $\rho^2 \boldsymbol{I}_{M+1,m} \in \mathbb{C}^{(M+1)(M+1)}$ が無視できるほど十分小さいと考えているが，実データには雑音が存在し，雑音が大きい場合に $\rho^2 \boldsymbol{I}_{M+1,m}$ の影響により式 (3.17) が成り立たなく，到来方向の推定精度が低下することが考えられる．このため，全てのテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ から雑音を含む成分 $\rho^2 \boldsymbol{I}_{M+1,m}$ をうまく推定して，それを取り除くことが必要である．

3.2　提案法

この節では，前節で説明したように Qian 手法の 2 つの問題点を改良して到来方向の推定精度を向上する手法を提案する [35]．まず，第 1 の問題点に対する改良として，受信信号の相関行列 $\boldsymbol{R}$ に対し，**3.1.2** で説明した交換行列 $\boldsymbol{J}$ を利用して次のように行列 $\bar{\boldsymbol{R}}$ を求める．

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \big(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{R}^* \boldsymbol{J}\big)/2 \tag{3.34}$$

このとき，$\bar{\boldsymbol{R}}$ の各行が複素共役対称であることが次のようにして分かる．

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{R}} &= \frac{1}{2}\Big(E\left[\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^H(t)\right] + \boldsymbol{J}E\left[\boldsymbol{y}^*(t)\boldsymbol{y}^T(t)\right]\boldsymbol{J}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}
E\left[y_{\text{-}M}(t)y_{\text{-}M}{}^*(t)\right] & E\left[y_{\text{-}M}(t)y_{\text{-}(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_{\text{-}M}(t)y_M{}^*(t)\right] \\
E\left[y_{\text{-}(M\text{-}1)}(t)y_{\text{-}M}{}^*(t)\right] & E\left[y_{\text{-}(M\text{-}1)}(t)y_{\text{-}(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_{\text{-}(M\text{-}1)}(t)y_M{}^*(t)\right] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
E\left[y_M(t)y_{\text{-}M}{}^*(t)\right] & E\left[y_M(t)y_{\text{-}(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_M(t)y_M{}^*(t)\right]
\end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix}
E\left[y_M{}^*(t)y_M(t)\right] & E\left[y_M{}^*(t)y_{(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_M{}^*(t)y_{\text{-}M}(t)\right] \\
E\left[y_{(M\text{-}1)}{}^*(t)y_M(t)\right] & E\left[y_{(M\text{-}1)}{}^*(t)y_{(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_{(M\text{-}1)}{}^*(t)y_{\text{-}M}(t)\right] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
E\left[y_{\text{-}M}{}^*(t)y_M(t)\right] & E\left[y_{\text{-}M}{}^*(t)y_{(M\text{-}1)}{}^*(t)\right] & \cdots & E\left[y_{\text{-}M}{}^*(t)y_{\text{-}M}(t)\right]
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

式 (3.35) により，$\bar{\boldsymbol{R}}$ の $m\,(m = -M, \ldots, 0, \ldots, M)$ 行目と $-m$ 行目は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{R}}(m,:) =& \frac{1}{2}\left[\ E\left[y_m(t)y_{\text{-}M}{}^*(t)\right],\ E\left[y_m(t)y_{\text{-}(M\text{-}1)}{}^*(t)\right],\ \cdots,\ E\left[y_m(t)y_M{}^*(t)\right]\ \right] \\
&+\frac{1}{2}\left[E\left[y_{\text{-}m}{}^*(t)y_M(t)\right],\ E\left[y_{\text{-}m}{}^*(t)y_{(M\text{-}1)}{}^*(t)\right],\ \cdots,\ E\left[y_{\text{-}m}{}^*(t)y_{\text{-}M}(t)\right]\right] \\
\bar{\boldsymbol{R}}(-m,:) =& \frac{1}{2}\left[E\left[y_{\text{-}m}(t)y_{\text{-}M}{}^*(t)\right],\ E\left[y_{\text{-}m}(t)y_{\text{-}(M\text{-}1)}{}^*(t)\right],\ \cdots,\ E\left[y_{\text{-}m}(t)y_M{}^*(t)\right]\right] \\
&+\frac{1}{2}\left[\ E\left[y_m{}^*(t)y_M(t)\right],\ E\left[y_m{}^*(t)y_{(M\text{-}1)}{}^*(t)\right],\ \cdots,\ E\left[y_m{}^*(t)y_{\text{-}M}(t)\right]\ \right] \\
=& \bar{\boldsymbol{R}}^*(m,:)\boldsymbol{J}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

求めた行列 $\bar{\boldsymbol{R}}$ が元の受信信号の相関行列 $\boldsymbol{R}$ と同じ到来信号の情報を持ち，さらに $\bar{\boldsymbol{R}}$ の m 行目と $-m$ 行目は複素共役対称である．これ以降は，$\bar{\boldsymbol{R}}$ を用いて推定を行う．

次に，第 2 の問題点に対する改良として，雑音電力を推定し全てのテプリッツ行列から雑音を含む成分を除去する．まず，第 1 の問題点に対する改良で求めた行列 $\bar{\boldsymbol{R}}$ により雑音電力を推定する．P 個の到来波の中の最初の Q 個の波が相関である場合，行列 $\bar{\boldsymbol{R}}$ の固有値を $\lambda_m\,(m = 1, 2, \ldots, 2M+1)$ とすると，**2.2.1** で説明したように，$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{P-Q} > \lambda_{P-Q+1} = \cdots = \lambda_{2M+1} = \rho^2 > 0$ が成り立つので，

雑音電力を $\bar{\boldsymbol{R}}$ の最小の固有値として推定する．

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}^2 &= \min \operatorname{eig}\left\{\bar{\boldsymbol{R}}\right\} \\
&= \min\left\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2M+1}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

ここで，$\min \operatorname{eig}\{\cdot\}$ は $\{\cdot\}$ の最小の固有値を表す．そして，式 (3.34) により $\bar{\boldsymbol{R}}$ から求めたテプリッツ行列 $\bar{\boldsymbol{R}}_m$ より雑音成分を除去し，雑音を含まないテプリッツ行列 $\hat{\boldsymbol{R}}_m$ が得られる．以後の処理はこの $\hat{\boldsymbol{R}}_m$ を利用して行う．

$$
\hat{\boldsymbol{R}}_m = \bar{\boldsymbol{R}}_m - \hat{\rho}^2 \boldsymbol{I}_{M+1,m} \tag{3.38}
$$

そして，式 (3.24) と式 (3.25) より，$\boldsymbol{G}(\theta) \in \mathbb{C}^{(M+1)\times(M+1)}$ を以下のように求める．

$$
\boldsymbol{F} = \sum_{m=-M}^{0} \hat{\boldsymbol{R}}_m^H \hat{\boldsymbol{R}}_m \tag{3.39}
$$

$$
\boldsymbol{G}(\theta) = [\hat{\boldsymbol{R}}_{-M}^H \bar{\boldsymbol{a}}(\theta), \ldots, \hat{\boldsymbol{R}}_0^H \bar{\boldsymbol{a}}(\theta)] \tag{3.40}
$$

以後は Qian 手法と同様に，式 (3.33) によりスペクトラム関数 $\mathcal{P}_{Qian}(\theta)$ を求め，これのピークにより到来方向を推定する．

以下に提案法のアルゴリズムを簡単にまとめる．

1. Qian 手法と同様に行列 $\boldsymbol{R}$ を求める．
2. 式 (3.34) より，行列 $\bar{\boldsymbol{R}}$ を求める．
3. 式 (3.37) より雑音電力 $\hat{\rho}^2$ を推定して，式 (3.38) よりテプリッツ行列 $\hat{\boldsymbol{R}}_m$ を作成する．
4. Qian 手法の 3. と同様に到来方向を推定する．

3.3 シミュレーションによる提案法の評価

ここでは，計算機シミュレーションを行なうことにより，Qian 手法の改良法の有効性を示す．

3.3.1 シミュレーション環境と諸元

ここでは，Intel Core i7, 3.4 GHz, RAM 16 GB, Windows 7 64 ビット，MATLAB R2013a の環境下で以下の表 3.1 のシミュレーション諸元において，計算機シミュレーションにより提案法の到来方向の推定精度及び計算コストについて評価する．アレーの素子間隔を到来波の半波長とし，SNR (Signal to Noise Ratio) は個々の到来波の電力とアレー素子毎に発生する熱雑音電力の比とする．また，全ての到来波は同電力であることを仮定する．

表 3.1: シミュレーション諸元

<table>
<tr><td colspan="2">素子数 M</td><td>$9, 11, 17$</td></tr>
<tr><td colspan="2">素子間隔 d</td><td>0.5λ</td></tr>
<tr><td colspan="2">到来波数 P</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">位相のみ異なる相関波数 Q</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">スナップショット数 K</td><td>$10 \sim 1,000$</td></tr>
<tr><td colspan="2">入力 SNR</td><td>-5 dB$\sim$ 20 dB; 5 dB 刻み</td></tr>
<tr><td colspan="2">M-MENSE 法のサブアレーサイズ</td><td>$4, 5, 8$</td></tr>
<tr><td colspan="2">FBSS-MUSIC 法のサブアレーサイズ</td><td>$6, 7, 10$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">試行回数</td><td>到来方向を固定した場合</td><td>$2,000$ 回</td></tr>
<tr><td>到来方向をランダムに変化させた場合
($-80^\circ \sim 80^\circ$ で到来間隔 10° 以上)</td><td>$40,000$ 回</td></tr>
</table>

3.3.2 到来方向推定誤差の比較

到来方向の推定精度の比較指標として式 (3.41) に定義された平均二乗誤差 (RMSE: Root Mean Square Error) を用いる．

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{PT}\sum_{k=1}^{T}\sum_{p=1}^{P}(\hat{\theta}_{p,k} - \theta_p)^2} \tag{3.41}$$

ここで, T を試行回数とし，θ_p を p 番目の到来波の真の到来方向とし，$\hat{\theta}_{p,k}$ を p 番目の到来波に対し k 回目で推定した到来方向とする．

この到来方向推定誤差のRMSEを用いて，SNRとスナップショット数Kを変化させたときの提案法，Qian手法と，FBSS-MUSIC法の推定精度を比較する．到来波数が未知としてM-MENSE法により到来波数を推定してからFBSS-MUSIC法を用いた手法(FBSS-MUSIC-MMENSE法)もここで比較を行う．そして，理論下限値（CRB: Cramer-Rao Bound）も同時に示す．CRBは次式から求められる[37]．

$$\mathrm{CRB}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\rho^2}{2K}\Big\{\mathrm{Re}\big[(\boldsymbol{B}^H\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{B}) \odot \boldsymbol{R}_s^T\big]\Big\}^{-1} \tag{3.42}$$

ここで，$\mathrm{Re}\,[\cdot]$は$[\cdot]$の実部を表し，$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_P]$，$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}(\theta_1), \boldsymbol{b}(\theta_2), \ldots, \boldsymbol{b}(\theta_P)]$，$\boldsymbol{b}(\theta) = \frac{\partial \boldsymbol{a}(\theta)}{\partial \theta}$である．また，$\odot$はアダマール積を表す．同じサイズ$M \times N$を持つ二つの行列$\boldsymbol{X} = (x_{m,n}), \boldsymbol{Y} = (y_{m,n})\,(m = 1, \ldots, M; n = 1, \ldots, N)$に対して，それらのアダマール積$\boldsymbol{X} \odot \boldsymbol{Y}$は以下のように定義される．

$$\boldsymbol{X} \odot \boldsymbol{Y} = \big(x_{m,n} \cdot y_{m,n}\big)_{\substack{1 \le m \le M \\ 1 \le n \le N}} \tag{3.43}$$

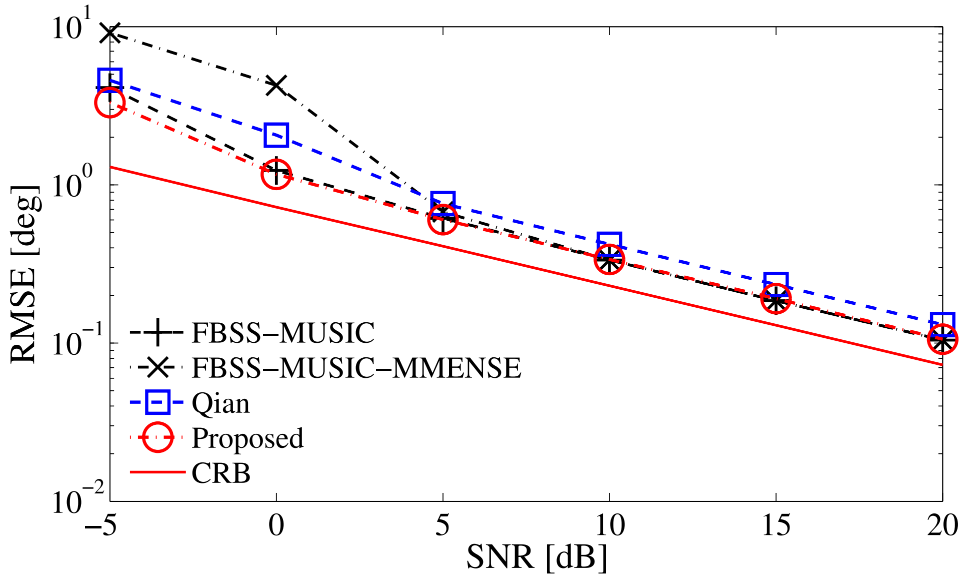
また，$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^H$であり，$\boldsymbol{R}_s = \mathbb{E}\left\{\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^H(t)\right\}$は到来波の自己相関行列であり，$\boldsymbol{I}$は単位行列である．

ここでは，到来方向の値を固定した場合と，実環境に近いような状況で到来方向がランダムな値とした場合の二つの場合に対して評価を行なう．

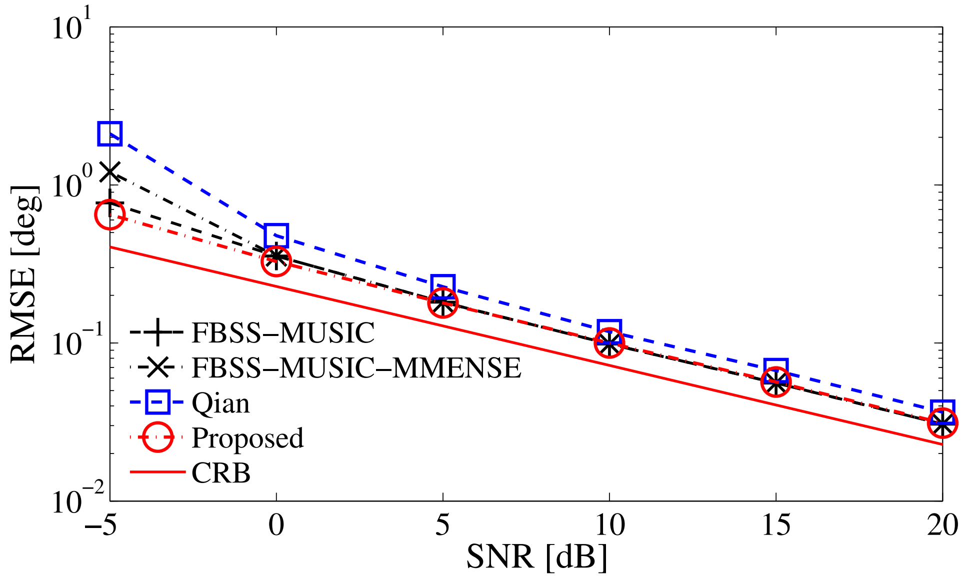
3.3.2.1　到来方向を固定した場合

ここで，アレー素子数11 $(M = 5)$のULAに同電力の$P = 4$波が$-60°, -40°, 15°, 55°$の方向から到来し，$-60°$, $-40°$の方向から来た波が相関であり，それ以外はお互いに無相関と仮定する．

まずは，スナップショット数Kがそれぞれ10と100の場合において，SNRの値を$= -5\,\mathrm{dB}$から$20\,\mathrm{dB}$の$5\,\mathrm{dB}$刻みで変化させ，$2,000$回の試行回数での各手法のSNRに対するRMSEを比較した結果を図3.2に表す．



(a) スナップショット数 $K = 10$ の場合



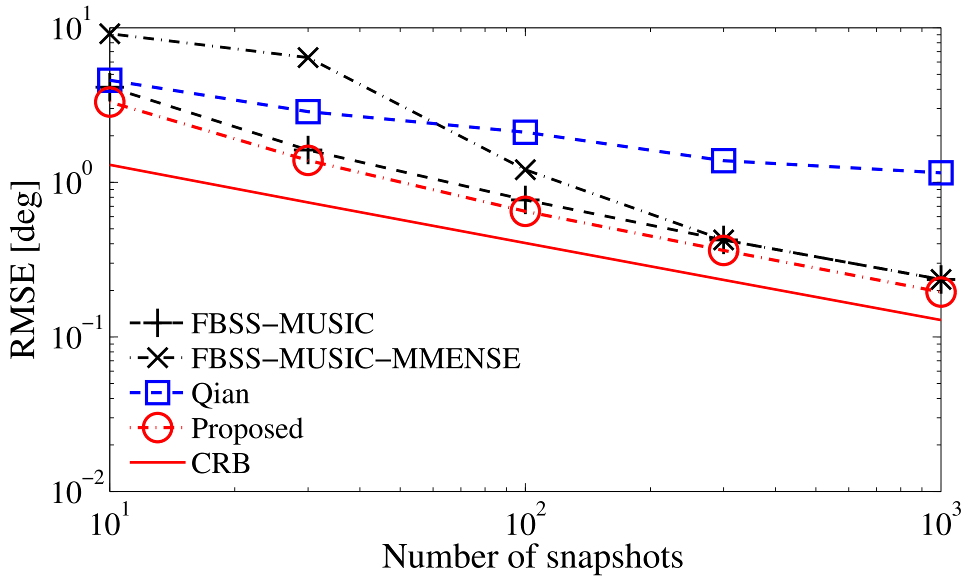
(b) スナップショット数 $K = 100$ の場合

図 3.2: 到来方向を固定した場合の SNR に対する推定精度

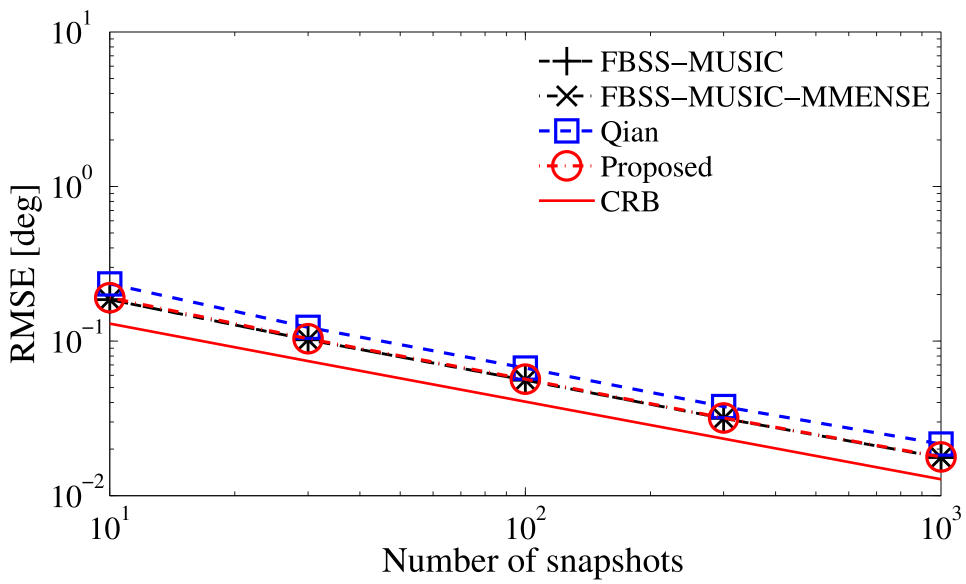
図 3.2(a) により，到来方向を固定した場合の SNR に対する RMSE は，提案法と FBSS-MUSIC 法の推定精度がほぼ一致している．SNR が 0 dB 以上の場合において，M-MENSE 法により到来波数が 4 波と正確に推定出来ているため，FBSS-MUSIC-MMENSE 法が提案法と同様に FBSS-MUSIC 法と同じ推定精度が得られる．また，このとき，Qian 手法の推定精度が，前述した 3 つの手法の推定精度とほぼ同じとなる．しかし，SNR が 0 dB 以下の場合において，M-MENSE 法による到来波数の推定が誤ってしまうため，FBSS-MUSIC-MMENSE の推定精度が大きく低下した．このときにも，Qian 手法も推定精度が大きく低下した．

図 3.2(b) では, スナップショット数 K が多くなると，M-MENSE 法を用いる場合でも到来波数が正しく推定できるため，提案法と FBSS-MUSIC-MMENSE 法と FBSS-MUSIC 法は同等の推定精度が得られる．一方，Qian 手法では，低 SNR において推定精度が大きく低下する傾向である．この結果により，スナップショット数 K が大きければ大きいほど，第 2 の問題に対する改良の効果が良いと考えられる．

次に，SNR の値がそれぞれ -5 dB と 15 dB の場合において，スナップショット数 K を $10, 30, 100, 300, 1000$ のように変化させ，各手法のスナップショット数 K に対する RMSE を比較した結果を図 3.3 に表す．



(a) SNR= -5 dB



(b) SNR= 15 dB

図 3.3: 到来方向を固定した場合の K に対する推定精度

図 3.3(a) から分かるように，提案法の推定精度は FBSS-MUSIC 法の推定精度より向上する．SNR が $-5\,\mathrm{dB}$ のため，M-MENSE 法により推定した到来波数が 1 波, 2 波，3 波と不正確になる場合があり, 完全に正しく推定出来ていないため，FBSS-MUSIC-MMENSE 法の推定精度が大きく低下している．また，Qian 手法では，スナップショット数 K とあまり関係なく推定精度が悪い．

図 3.3(b) により，SNR が $15\,\mathrm{dB}$ の場合において，提案法，FBSS-MUSIC 法と FBSS-MUSIC-MMENSE 法の推定精度がほぼ同じとなり，その次に Qian 手法の推定精度が前述した 3 つの手法よりわずかに低下している．この結果により，雑音が小さい場合においては第 2 の問題点に対する改良の効果が少ないと分かった．

3.3.2.2 到来方向をランダムにした場合

3.3.2.1 では，到来方向を固定して各手法の RMSE を比較していたが，これはあくまでその到来方向の値に限った場合のみの比較結果であり，この結果により各手法の精度を評価することは十分であるとは言い難いと考える．また，実環境では到来波が様々な方向から到来するため，実環境のようなシナリオでシミュレーションを行うことが重要である．このため，到来方向を -90° から 90° までの範囲内で，ランダムに変化させて検証する．しかし，$\pm 90^\circ$ の方向，いわゆるエンドファイア方向やエンドファイア方向の付近から到来した場合では到来方向の推定はあまりうまくできないことが多い．従って，これらの場合の到来方向推定精度が悪化してしまう．また到来間隔が小さすぎると，推定精度も悪化するため，RMSE の比較結果による性能評価の信頼性が低い．このため，シミュレーションでは，到来方向については完全にランダムに変化するのではなく，到来波が -80° から 80° までの間で 10° 以上離れてランダムに到来すると仮定する．

ここで同電力の $P = 4$ 波 (最初の $Q = 2$ 波が相関) が到来方向 -80° から 80° までの間で 10° 以上の到来間隔でランダムな方向から素子数 11 ($M = 5$) の ULA に到来すると仮定する．このとき，**3.3.2.1** と同様に，SNR の値を $= -5\,\mathrm{dB}$ から $20\,\mathrm{dB}$ の $5\,\mathrm{dB}$ 刻みで変化させ，スナップショット数 K を $10, 30, 100, 300, 1000$ のように

変化させ，$40,000$ 回の試行を行なう．

まずは，スナップショット数 K がそれぞれ 10 と 100 の場合において，各手法の SNR に対する RMSE を比較した結果を図 3.4 に表す．

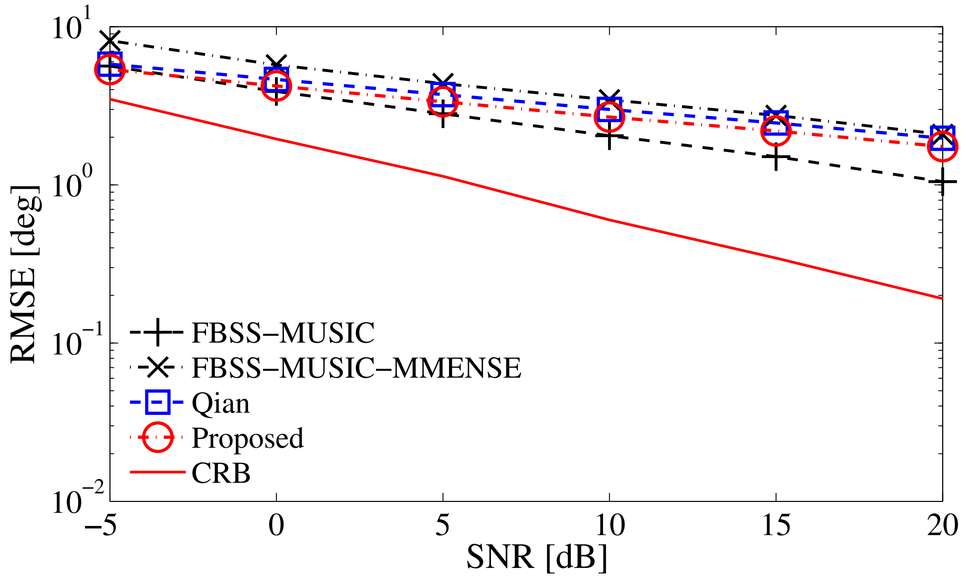
図 3.4(a) により，推定精度の良い方から並べると，FBSS-MUSIC 法，提案法，Qian 手法，FBSS-MUSIC-MMENSE 法の順になる．

図 3.4(b) により，スナップショット数 K が大きくなると ($K = 100$), 提案法は FBSS-MUSIC 法とほぼ同じ推定精度が得られている．このとき，M-MENSE 法はうまく到来波数を推定できて，推定精度の良い方から並べると，FBSS-MUSIC 法，提案法, FBSS-MUSIC-MMENSE 法，Qian 手法の順になる．

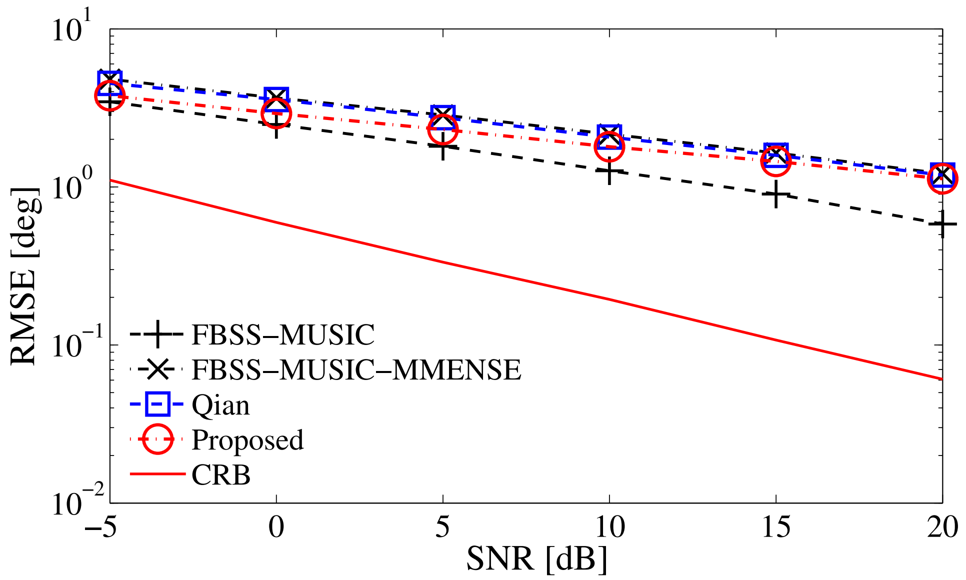
次に，SNR の値がそれぞれ $-5\,\mathrm{dB}$ と $15\,\mathrm{dB}$ の場合において，各手法のスナップショット数 K に対する RMSE を比較した結果を図 3.5 に表す．

図 3.5(a) では，提案法と FBSS-MUSIC 法の推定精度がほぼ同じとなる．このとき，SNR が小さいため M-MENSE 法は正しく到来波数を推定できないので，スナップショット数 K が小さい場合では FBSS-MUSIC-MMENSE 法の推定精度が低下する．

図 3.5(b) では, SNR が大きいため，提案法は FBSS-MUSIC 法の次に高い推定精度が得られている．このとき，M-MENSE 法がうまく到来波数を推定できていることにより，FBSS-MUSIC-MMENSE 法の推定精度が改善した．各到来方向推定法において推定精度の良い方から並べると，FBSS-MUSIC 法，提案法，Qian 手法，FBSS-MUSIC-MMENSE 法の順になる．

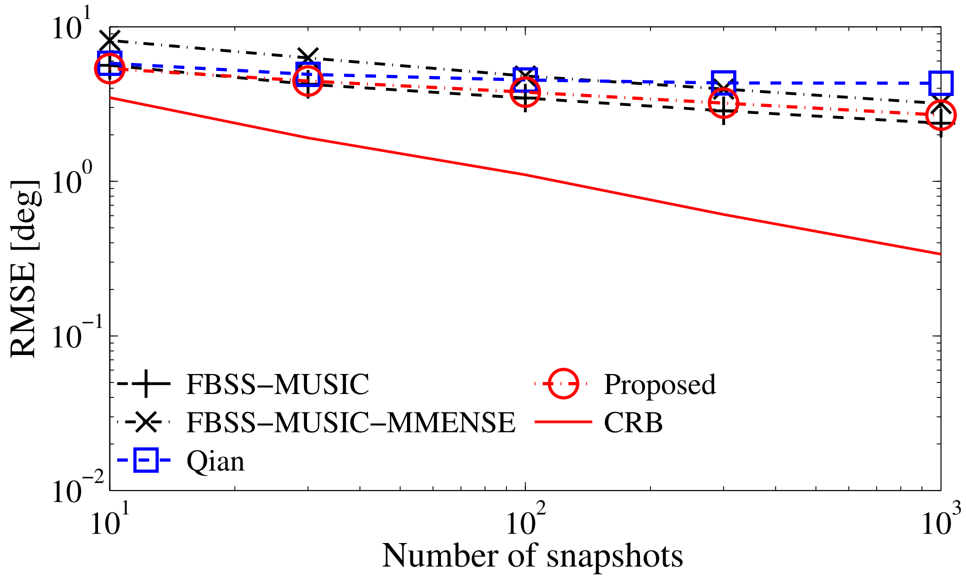


(a) スナップショット数 $K = 10$ の場合

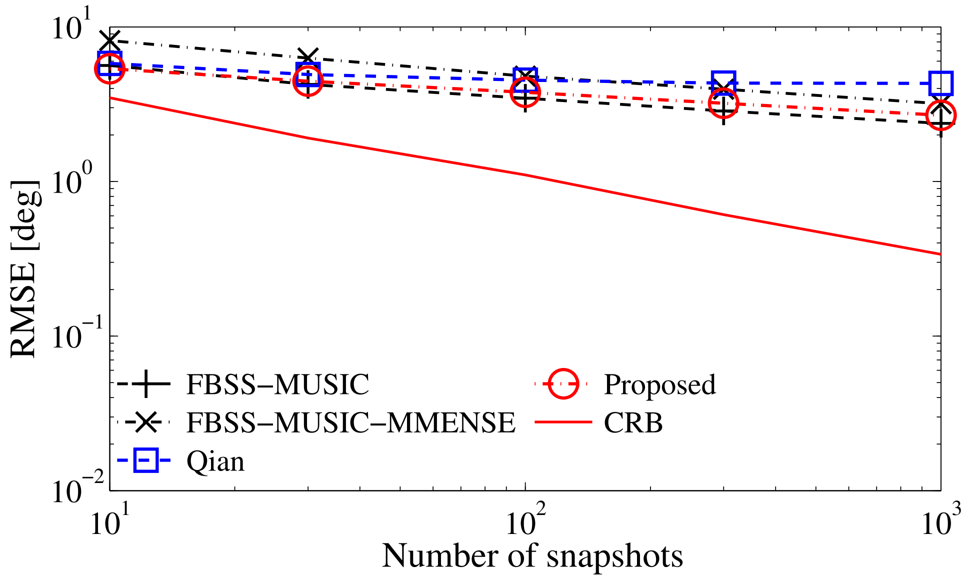


(b) スナップショット数 $K = 100$ の場合

図 3.4: 到来方向をランダムにした場合の SNR に対する推定精度



(a) SNR= −5 dB



(b) SNR= 15 dB

図 3.5: 到来方向をランダムにした場合の K に対する推定精度

3.3.3 計算コストの比較

ここでは，提案法と Qian 手法の計算コストを比較するため，まずはそれぞれの手法の理論的演算回数を比較する．その後，**3.3.1** と同じシミュレーション環境下で，複数回実行させた際の推定時間の平均値を一回の推定時間とし，両者の一回の推定時間の測定値の比較を行う．

3.3.3.1 演算回数の比較

まずは，提案法と Qian 手法の演算回数について評価する．演算回数は，複素数の演算等で利用する実数の乗算と加算の回数とする．

Qian 手法のアルゴリズムにより，一回の推定では，受信信号により求めた相関行列 $\boldsymbol{R}$ を用い，テプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_m$ と $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}^\dagger$ を求めた後，式 (3.33) により角度 θ に対して -90° から 90° までの T_θ(正の整数) 回をスキャンすることになる．そのため，Qian 手法の一回の推定で利用する演算回数は，主に T_θ 回のスキャンで $\mathcal{P}(\theta)$ の計算に利用する演算回数であると考えられる．

相関行列 $\boldsymbol{R}$ を求めるのに，$\mathcal{O}\big((2M+1)^2(8K-2)\big)$ の演算回数が必要となる．次に行列 $\boldsymbol{F}$ を求めるために，$\mathcal{O}\big((M+1)^2(10M+6)\big)$ の演算回数が必要となる．$\boldsymbol{F}$ より $\boldsymbol{F}^\dagger$ を求める際に，正方行列の逆行列における演算回数は列数の 3 乗に比例すること [38] に注意すると，$\boldsymbol{F}^\dagger$ を求めるのに $\mathcal{O}\big((M+1)^3\big)$ の演算回数が必要となる．さらに，$\mathcal{P}(\theta)$ を計算するため，行列 $\boldsymbol{G}(\theta)$，行列の積 $\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^\dagger\boldsymbol{G}(\theta)$，そして最大固有値 $\max\mathrm{eig}\left\{\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^\dagger\boldsymbol{G}(\theta)\right\}$ を計算するので，それぞれにおける演算回数の総和が $\mathcal{P}(\theta)$ の計算に利用する演算回数となる．正方行列の固有値における計算回数が行列の列数の 3 乗に比例すること [39] に注意すると，行列 $\boldsymbol{G}(\theta)$，行列の積 $\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^\dagger\boldsymbol{G}(\theta)$ と最大固有値 $\max\mathrm{eig}\left\{\boldsymbol{G}^H(\theta)\boldsymbol{F}^\dagger\boldsymbol{G}(\theta)\right\}$ の計算における演算回数はそれぞれ $\mathcal{O}\big(8M^3\big)$，$\mathcal{O}\big(16M^3\big)$，$\mathcal{O}\big((M+1)^3\big)$ となるため，Qian 手法の演算回数は $\mathcal{O}\big((2M+1)^2(8K-2)+(M+1)^2(11M+7)+25T_\theta M^3\big)$ となる．

一方，提案法では，Qian 手法と比べて，それぞれの問題点に対する改良を行なう際に，それらによる演算回数の分が多くなる．第 1 の問題点に対する改良では，

式 (3.34) により，$\bar{\boldsymbol{R}}$ を求めるためには，$\mathcal{O}\big(2(2M+1)^2\big)$ 演算回数が必要となる．第 2 の問題点に対する改良では，雑音電力を推定するため，$\bar{\boldsymbol{R}}$ の最小の固有値を求めるので，演算回数は $\mathcal{O}\big((2M+1)^3\big)$ となる．これにより，Qian 手法の改良法の演算回数は $\mathcal{O}\big((2M+1)^2(2M+8K+1)+(M+1)^2(11M+7)+25T_\theta M^3\big)$ となる．提案法と Qian 手法の演算回数を以下の表 3.2 にまとめる．

表 3.2: 提案法と Qian 手法の演算回数

到来方向推定手法	演算回数
Qian 手法	$\mathcal{O}\big((2M+1)^2(8K-2)+(M+1)^2(11M+7)+25T_\theta M^3\big)$
提案法	$\mathcal{O}\big((2M+1)^2(2M+8K+1)+(M+1)^2(11M+7)+25T_\theta M^3\big)$

各手法の一回の推定で利用する演算回数は，主に T_θ 回のスキャンで $\mathcal{P}(\theta)$ の計算に利用する演算回数であると考えられ，この部分においては同じ演算回数となるので，両手法の演算回数はほぼ同じと考えられる．

3.3.3.2 推定時間の比較

ここでは，スキャンの角度刻み 1° で，$2,000$ 回の推定をした際の推定時間を平均した一回の推定時間に関して，提案法と Qian 手法を比較する．**3.3.1** で示したシミュレーション環境下で，到来波数 $P=4$, 相関波数 $Q=2$ にして，アンテナの素子数をそれぞれ 9 $(M=4)$ と 17 $(M=8)$ の場合に対して，表 3.3 により提案法と Qian 手法の一回の推定の時間を示す．

表 3.3: 提案法と Qian 手法の推定時間

到来方向推定手法	アレー素子数 $2M+1$	
	$=9\,(M=4)$	$=17\,(M=8)$
Qian 手法	9.3 ms	16.0 ms
提案法	9.4 ms	16.5 ms

表 3.3 により，提案法の推定時間はほぼ Qian 手法と同様になり，Qian 手法の改良法で行なった改良はあまり推定時間に影響を与えないと分かる．この結果は，**3.3.3.1** の結果と対応している．

3.4 3 章のまとめ

計算機シミュレーションの結果により，到来方向が固定している場合とランダムに変化した場合のどちらも，提案法は未知の到来波数情報に対して，Qian 手法より推定精度が向上し，到来波数が既知とした FBSS-MUSIC 法の推定精度とほぼ近づいた，高い推定精度が得られている．また，**3.3.3** に示した結果により，提案法の計算コストについても Qian 手法と同程度の計算コストであるため，提案法の有効性が確認できた [35]．

これによって，提案法は未知の到来波数に対して高精度に到来方向推定できることが分かった．

第4章　アレー素子数以上の到来波に対する到来方向推定

第 **1** 章で説明したように，本章では本研究の課題とした到来波数がアレー素子数より多い場合，すなわち劣決定と呼ばれる場合に対しても高精度な到来方向を推定できる方法を述べる．まず，Pal 手法について説明して，その後，Pal 手法における問題点及びそれらの問題点に対する改良を述べ，Pal 手法の推定精度及び推定速度を向上する Pal 手法の改良法を提案する．

4.1　Pal手法とその問題点

ここでは，Pal 手法のアルゴリズム及び問題点について説明する．

4.1.1　コプライムアレーと信号のモデル

図 4.1 のように，M と N を互いに素の正整数とし，d を素子間隔の基準とし，N 素子で素子間隔 Md の ULA($\circ$) と，$2M$ 素子で素子間隔 Nd の ULA($\bullet$) が基準とする 0 番目の素子を共有して一つの直線上に配置されている $L\,(=2M+N-1)$ 素子のリニアアレーを考える．

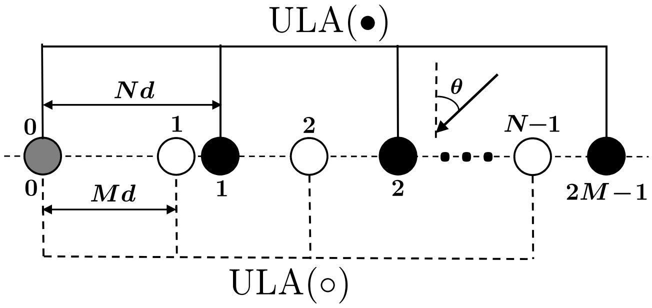


図 4.1: $(2M+N-1)$ 素子より成るコプライムアレー

このアレーはコプライムアレーと呼ばれる．ここで，集合 $\mathbb{S}$ を以下のように定義する．

$$\mathbb{S} = \{0, M, \ldots, (N-1)M, N, 2N, \ldots, (2M-1)N\} \tag{4.1}$$

また，$\mathbb{S}(k)\,(k=1,\ldots,L)$ を $\mathbb{S}$ の k 番目の要素とすると，コプライムアレーの各素子の位置は $\mathbb{S}(k)d$ となる．以降，$\mathbb{S}$ はコプライムアレーを意味する．各素子における θ 方向に対応する $L\times 1$ の方向ベクトルを $\boldsymbol{a}(\theta)$ とすると，$\boldsymbol{a}(\theta)$ は以下のようになる．

$$\boldsymbol{a}(\theta) = [\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbb{S}(1)d\sin\theta}, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbb{S}(2)d\sin\theta}, \ldots, \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\mathbb{S}(L)d\sin\theta}]^T,\ \mathbb{S}(k)\in\mathbb{S} \tag{4.2}$$

このコプライムアレーに，無限遠にある波源から互いに無相関な P 個の到来波 $s_p\,(p=1,\ldots,P)$ が波長 $\lambda=2d$ で, それぞれの電力 σ_p^2 で方向 θ_p から到来する場合を考える．スナップショット数を K とし，$t=1,\ldots,K$ をスナップショットの番号とすると，k 番目の素子の受信信号の解析信号 $y_k(t)$ は次式のようになる．

$$y_k(t) = \sum_{p=1}^{P} s_p(t)\mathrm{e}^{-j\pi\mathbb{S}(k)\sin\theta_p} + w_k(t) \tag{4.3}$$

ここで，$s_p(t)$ を p 番目の到来波の解析信号，$w_k(t)$ を第 k 素子アンテナに発生する加算的白色雑音からなる内部雑音とする．方向行列 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}(\theta_1),\ldots,\boldsymbol{a}(\theta_P)]$, 到来波の信号ベクトル $\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t),\ldots,s_P(t)]^T$, 内部雑音ベクトル $\boldsymbol{w}(t)=[w_1(t),\ldots,w_L(t)]^T$ とすると，受信信号ベクトル $\boldsymbol{y}(t)=[y_1(t),\ldots,y_L(t)]^T$ は以下のようになる．

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{w}(t) \tag{4.4}$$

ここで，ρ^2 を雑音電力とし，到来波の自己相関行列 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\left\{\sigma_1^2, \ldots, \sigma_P^2\right\}$ とし，$\boldsymbol{I}_L$ を L 次の単位行列とすると，受信信号 $\boldsymbol{y}(t)$ の相関行列 $\boldsymbol{R}_y = \mathbb{E}\left\{\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^H(t)\right\}$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_y &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^H + \rho^2\boldsymbol{I}_L \\ &= \sum_{p=1}^{P} \sigma_p^2 \boldsymbol{a}(\theta_p)\boldsymbol{a}^H(\theta_p) + \rho^2\boldsymbol{I}_L \end{aligned} \tag{4.5}$$

行列のベクトル化 $\mathrm{vec}(\cdot)$ は，行列の各列ベクトルを列の順で一つの列ベクトルに結合したものを表すことにすると，$\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_y)$ は以下のようになる．

$$\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}} = \mathrm{vec}\left[\sum_{p=1}^{P} \sigma_p^2 \big(\boldsymbol{a}(\theta_p)\boldsymbol{a}^H(\theta_p)\big)\right] + \rho^2\vec{\mathbf{1}}_n \tag{4.6}$$

$$= \boldsymbol{B}(\theta_1, \ldots, \theta_P)\boldsymbol{p} + \rho^2\vec{\mathbf{1}}_n \tag{4.7}$$

ここで，$\mathbb{D}$ を次のように定義する．

$$\mathbb{D} = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{S}\}$$

$|\mathbb{D}|$ を集合 $\mathbb{D}$ の要素数とし，$\mathbb{D}(k)\,(k = 1, \ldots, |\mathbb{D}|)$ を $\mathbb{D}$ の k 番目の要素とすると，位置 $\mathbb{D}(k)d$ にあるアレー素子からなるものを，差分アレーと呼ぶ．以降，$\mathbb{D}$ は差分アレーを意味する．また，$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}^*(\theta_1) \otimes \boldsymbol{a}(\theta_1), \ldots, \boldsymbol{a}^*(\theta_P) \otimes \boldsymbol{a}(\theta_P)]$ であり，$\otimes$ はクロネッカー積である．$M \times N$ 次行列 $\boldsymbol{X} = (x_{m,n})$ と $Q \times R$ 次行列 $\boldsymbol{Y} = (y_{q,r})$ のクロネッカー積 $\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y}$ は $MQ \times NR$ 次の行列となり，以下のように定義される．

$$\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} x_{11}\boldsymbol{Y} & x_{12}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{1N}\boldsymbol{Y} \\ x_{21}\boldsymbol{Y} & x_{22}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{2N}\boldsymbol{Y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{M1}\boldsymbol{Y} & x_{M2}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{MN}\boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

また，$\boldsymbol{p} = [\sigma_1^2, \ldots, \sigma_P^2]^T$，そして $\vec{\mathbf{1}}_n = [\boldsymbol{e}_1^T, \ldots, \boldsymbol{e}_L^T]^T$ で $\boldsymbol{e}_i (i = 1, \ldots, L)$ は，i 番目の成分のみが 1 で，その他の全ての成分は 0 の縦ベクトルである．相関波が存在すると式 (4.5) 及び式 (4.7) が成り立たないことに注意する．式 (4.7) により，$\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ は方向行列 $\boldsymbol{B}$ を持つ差分アレーの受信信号であり，これは到来信号ベクトル $\boldsymbol{p}$ 及び

雑音成分 $\rho^2\vec{\mathbf{1}}_n$ からなると考えられる．すなわち，コプライムアレー $\mathbb{S}$ から差分アレー $\mathbb{D}$ に拡張することができ，以下の図 4.2 のようになる．

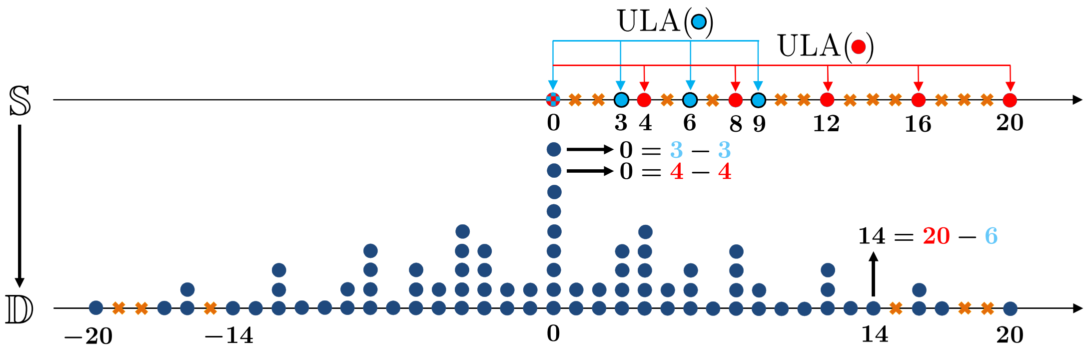


図 4.2: $M = 3, N = 4$ の場合のコプライムアレーから差分アレーへの拡張

コプライムアレー $\mathbb{S}$ の各素子の位置の差分により，差分アレー $\mathbb{D}$ の素子が得られる．これについて図 4.2 を用いて説明する．図 4.2 は，$M = 3, N = 4$ の場合の図であり，このとき，$d = 1$ とすると，コプライムアレー $\mathbb{S}$ は 9 素子のアレーで，各素子の位置は $\{0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 20\}$ となる．このなかには異なる二つの ULA があり，1 つ目の ULA の各素子の位置は $\{0, 3, 6, 9\}$ となり，残りの ULA の各素子の位置は $\{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$ となる．ここで，次の 2 つ場合の差分が得られる．それは，各素子と自分に対する差分及び異なる素子間の差分である．まずは，各素子と自分に対する差分により，差分アレー $\mathbb{D}$ の位置 0 には 9 個の素子が得られる．例えば，$\mathbb{S}$ の位置 3 の素子と自分の差分 $(0 = 3 - 3)$ または $\mathbb{S}$ の位置 4 の素子と自分の差分 $(0 = 4 - 4)$ 等により，$\mathbb{D}$ の位置 0 が得られる．次に，異なる素子の差分，例えば $\mathbb{S}$ の位置 20 の素子と位置 6 の素子の差分により，$\mathbb{D}$ の位置 14 の素子が得られる．この位置 14 の素子は，もともとコプライムアレー $\mathbb{S}$ に存在していなかったもので，実素子でない．このような素子を仮想素子と呼び，仮想素子を持つアレーを仮想アレーと呼ぶ．差分アレー $\mathbb{D}$ では，異なる 35 個の位置にアレー素子が存在するが，その内には，多くの仮想素子が存在し，また同じ位置において重複する素子も多く存在していることが分かる．ここで，重複要素を許可する多重集

合 $\mathbb{M}$ を次のように定義する．

$$\mathbb{M} = \{\!\{ m - n \mid m, n \in \mathbb{S} \}\!\}$$

ここで，$\mathbb{M}$ の要素数は $|\mathbb{M}| = L^2$ となり，$\mathbb{M}$ の $k\,(k = 1, \ldots, L^2)$ 番目の要素を $\mathbb{M}(k)$ とする．これにより，重複する素子を含めた差分アレー $\mathbb{D}$ の全ての素子の位置は，上の多重集合 $\mathbb{M}$ で表すことができる．つまり，k 番目の素子の位置は $\mathbb{M}(k)d$ となる．

4.1.2 Pal 手法

4.1.1 に示したように，コプライムアレー $\mathbb{S}$ からより素子数が多い差分アレー $\mathbb{D}$ に拡張することができる．Pal らは，この差分アレー $\mathbb{D}$ に対して，$\{-MNd, \ldots, 0d, \ldots, MNd\}$ に配置した連続素子の $(2MN+1)$ 素子を抽出した [30]．しかし，[28] では，差分アレー $\mathbb{D}$ に対して $\{(-MN-M+1)d, \ldots, 0d, \ldots, (MN+M-1)d\}$ に配置した連続素子の $(2M(N+1)-1)$ 素子を抽出することができることを示しており，Pal らより多くの連続素子を抽出できる．ここで，集合 $\mathbb{U}$ を以下のように定義する．

$$\mathbb{U} = \{m \mid \{-|m|, -|m|+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, |m|\} \subseteq \mathbb{S}\} \tag{4.9}$$

このとき，$\mathbb{U}(k)\,(k = 1, \ldots, |\mathbb{U}|)$ を $\mathbb{U}$ の k 番目の要素とすると，抽出されたアレーの素子の各位置は $\mathbb{U}(k)d$ となる．このアレーの各素子の間隔は d となるので，これは仮想 ULA である．以降，$\mathbb{U}$ はその仮想 ULA を意味する．図 4.2 では，$\mathbb{U}$ の素子は -14 番目から 14 番目までとなり，29 素子を持つ仮想 ULA である．

ここで，$S = (|\mathbb{U}|-1)/2 = M(N+1)-1$ と置くと，仮想アレー $\mathbb{U}$ は $-S, \ldots, 0, \ldots, S$ の順に並べた $(2S+1)$ 素子の素子間隔 d の ULA となる．この $\mathbb{U}$ の方向行列を $\boldsymbol{B}_1$ とする．$B_1(m,n)$ を $\boldsymbol{B}_1$ の (m,n) 成分とすると，$B_1(m,n) = \mathrm{e}^{-j\pi m \sin\theta_n}\,(m \in \mathbb{U}; n = 1, \ldots, P)$ である．従って，式 (4.7) で求めたベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ に対して，$\boldsymbol{B}_1$ に対応する各成分を抽出し，同じ仮想素子に対応する重複する成分を除いた後に昇順に並び替えて次のベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ が得られる．

$$\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}} = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{p} + \rho^2 \vec{\boldsymbol{e}} \tag{4.10}$$

ここで，$\vec{\boldsymbol{e}} \in \mathbb{R}^{(2S+1)\times 1}$ は，$(S+1)$ 番目の成分のみが 1 でそれ以外全ての成分は 0 となるベクトルである．このとき，仮想アレー $\mathbb{U}$ の相関行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ は次のように求めることができる．

$$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}} = \boldsymbol{x}_{\mathbb{U}} \boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}^H \tag{4.11}$$

これにより，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ のランクが 1 となりフルランクではないことが分かる．このため，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ に対して，MUSIC 法等を直接適用することができない．そのため，Pal らは到来方向を推定するため，空間平均処理を適用した．仮想アレー $\mathbb{U}$ を $(S+1)$ 個のサブアレーに分割し，それぞれのサブアレーが $(S+1)$ 素子を持つ．また，$k\,(=1,\ldots,S+1)$ 番目のサブアレーの素子の位置は以下のようになる．

$$\{(-k+1+m)d \mid m = 0, 1, \ldots, S\} \tag{4.12}$$

この k 番目のサブアレーは，$\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ の $(S+2-k)$ 行目から $(2S+2-k)$ 行目までの部分に対応し，その部分を $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}k}$ とすると，次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}k} = \boldsymbol{B}_{1k} \boldsymbol{p} + \rho^2 \vec{\boldsymbol{e}_k} \tag{4.13}$$

ここで，$\boldsymbol{B}_{1k}$ は $\boldsymbol{B}_1$ の $(S+2-k)$ 行目から $(2S+2-k)$ 行目までを持つ行列である．そして，$\vec{\boldsymbol{e}_k}$ は列ベクトルで，k 番目の要素が 1 で，それ以外の要素が全て 0 である．$\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}k}$ は次のように変形できる．

$$\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}k} = \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{\Phi}^{k-1} \boldsymbol{p} + \rho^2 \vec{\boldsymbol{e}_k} \tag{4.14}$$

ここで，$\boldsymbol{\Phi}$ は対角行列で以下のようになる．

$$\boldsymbol{\Phi} = \operatorname{diag}\left\{\mathrm{e}^{-j\pi\sin\theta_1}, \mathrm{e}^{-j\pi\sin\theta_2}, \ldots, \mathrm{e}^{-j\pi\sin\theta_P}\right\}$$

また，行列 $\boldsymbol{B}_2$ は以下のようになる．

$$\boldsymbol{B}_2 = [\boldsymbol{b}_2(\theta_1), \boldsymbol{b}_2(\theta_2), \ldots, \boldsymbol{b}_2(\theta_P)] \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{b}_2(\theta) = \left[1, \mathrm{e}^{j\pi\sin\theta}, \ldots, \mathrm{e}^{j\pi(S-1)\sin\theta}, \mathrm{e}^{j\pi S\sin\theta}\right]^T \tag{4.16}$$

また，行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}k}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}k} &= \boldsymbol{x}_{\mathbb{U}k}\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}k}^H \\ &= \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{\Phi}^{k-1})^H\boldsymbol{B}_2^H + \rho^4\vec{\boldsymbol{e}_k}\vec{\boldsymbol{e}_k}^H \\ &\quad + \rho^2\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{p}\vec{\boldsymbol{e}_k}^H + \rho^2\vec{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{\Phi}^{k-1})^H\boldsymbol{B}_2^H \end{aligned} \tag{4.17}$$

求めた各行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}k}$ に対して平均を取ると，[30] の結果により，以下の空間平均された行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ が得られる．

$$\boldsymbol{R}_{ss} = \frac{1}{S+1}\sum_{k=1}^{S+1}\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}k} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{S+1}\sum_{k=1}^{S+1}\Big(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{\Phi}^{k-1})^H\boldsymbol{B}_2^H + \rho^4\vec{\boldsymbol{e}_k}\vec{\boldsymbol{e}_k}^H \\ &\qquad +\rho^2\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{p}\vec{\boldsymbol{e}_k}^H + \rho^2\vec{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{\Phi}^{k-1})^H\boldsymbol{B}_2^H\Big) \\ &= \frac{1}{S+1}\Big(\boldsymbol{B}_2\big(\sum_{k=1}^{S+1}\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{\Phi}^{k-1})^H\big)\boldsymbol{B}_2^H + \rho^4\sum_{k=1}^{S+1}\vec{\boldsymbol{e}_k}\vec{\boldsymbol{e}_k}^H \\ &\qquad +\rho^2\boldsymbol{B}_2\sum_{k=1}^{S+1}\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{p}\vec{\boldsymbol{e}_k}^H + \rho^2\big(\sum_{k=1}^{S+1}\vec{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{\Phi}^{k-1})^H\big)\boldsymbol{B}_2^H\Big) \end{aligned} \tag{4.19}$$

ここで，式変形の詳細は省略するが，

$$\sum_{k=1}^{S+1}\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{\Phi}^{k-1})^H = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2{}^H\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}$$

$$\sum_{k=1}^{S+1}\vec{\boldsymbol{e}_k}\vec{\boldsymbol{e}_k}^H = \boldsymbol{I}_{S+1}$$

$$\sum_{k=1}^{S+1}\boldsymbol{\Phi}^{k-1}\boldsymbol{p}\vec{\boldsymbol{e}_k}^H = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2{}^H$$

$$\sum_{k=1}^{S+1}\vec{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{\Phi}^{k-1})^H = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}$$

となることに注意すると，$\boldsymbol{R}_{ss}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{ss} &= \frac{1}{S+1}\Big(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2{}^H\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2{}^H + \rho^4\boldsymbol{I}_{S+1} + 2\rho^2\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2{}^H\Big) \\ &= \frac{1}{S+1}\big(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2{}^H + \rho^2\boldsymbol{I}_{S+1}\big)^2 \in \mathbb{C}^{(S+1)\times(S+1)}\end{aligned} \tag{4.20}$$

ここで，$\boldsymbol{I}_{S+1}$ は $(S+1)$ 次の単位行列であり，$\boldsymbol{D}$ はもとの到来波の自己相関行列である．式 (4.20) の右辺に注目すると，$\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2{}^H+\rho^2\boldsymbol{I}_S$ は $(S+1)$ 素子の ULA の受信信号の相関行列と同様である．このため，行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ に対して MUSIC 法等を用いることが可能となり，S 個の到来波に対して到来方向を推定することができる．

以下に Pal 手法のアルゴリズムをまとめる．

1. 受信信号により相関行列 $\boldsymbol{R}_y$ 及びこれをベクトル化した $\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ を求め，行列 $\boldsymbol{B}_1$ に対応する $\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ の成分のみ抽出してベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ を求める．

2. 式 (4.18) より，空間平均による相関行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ を求める．

3. $\boldsymbol{R}_{ss}$ に MUSIC 法を適用し到来方向を推定する．

Pal 手法では，コプライムアレー $\mathbb{S}$ から差分アレー $\mathbb{D}$ に拡張した後に，$\mathbb{D}$ の連続素子を抽出して仮想 ULA である $\mathbb{U}$ を求める際に，重複仮想素子を除いている．つまり，式 (4.7) で求めたベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ に対して，方向行列 $\boldsymbol{B}_1$ に対応する各成分を抽出し，同じ仮想素子に対応する重複する成分を除いてベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ を求めた．このことによって，アレーアンテナで取得したサンプルデータの一部を削除したことで，到来方向を含む情報が無駄に除かれ，推定精度が低下する可能性があると考えられる．このことを，Pal 手法の第 1 の問題点とする [41]．

また，式 (4.18) において，$\boldsymbol{R}_{ss}$ を求めるために，空間平均処理を適用しているが，S が大きくなるに従い，計算コストも増えるので推定速度が遅くなる可能性があると考えられる．これを第 2 の問題点とする [41]．

4.2　提案法

4.1.2 に説明した Pal 手法の 2 つの問題点に対して，それぞれを改良した提案法を示す [41]．まず，第 1 の問題点に対する改良として，式 (4.10) のベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ を求める際に，方向行列 $\boldsymbol{B}_1$ に対応する $\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ の各成分を抽出し，同じ仮想素子に対応する重複する成分を除かずに，これらを平均しベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ を作る．従って，Pal

手法とは異なり，相関行列 $\boldsymbol{R}_y$ のデータを捨てずに全て用いる．

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}(q) = \frac{1}{|E_q^{\mathbb{U}}|}\sum_{l\in E_q^{\mathbb{U}}} \boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}(l),\ q = 1,\ldots,2S+1 \tag{4.21}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}(q)$ は $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ の q 番目の要素であり，$\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}(l)$ は $\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ の l 番目の要素である．また，$E_q^{\mathbb{U}} = \{l \mid \mathbb{M}(l) = \mathbb{U}(q),\ l = 1,\ldots,L^2\}$ は多重集合 $\mathbb{M}$ の中で位置 $\mathbb{U}(q)$ に重複している素子の番号である．$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ は $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ と同様に次式のようになる．

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{p} + \rho^2\vec{\boldsymbol{e}} \tag{4.22}$$

次に，第 2 の問題点に対する改良として，空間平均処理を避けるため，求めた $(2S+1)\times 1$ のベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ の成分の添字を $-S,\ldots,0,\ldots,S$ の添字に変換し，$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ を用いて以下のようにテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_T \in \mathbb{C}^{(S+1)\times(S+1)}$ を作成する．

$$\boldsymbol{R}_T = \begin{bmatrix} \bar{x}_{\mathbb{U}}(0) & \bar{x}_{\mathbb{U}}(-1) & \cdots & \bar{x}_{\mathbb{U}}(-S) \\ \bar{x}_{\mathbb{U}}(1) & \bar{x}_{\mathbb{U}}(0) & \cdots & \bar{x}_{\mathbb{U}}(1-S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{\mathbb{U}}(S) & \bar{x}_{\mathbb{U}}(S-1) & \cdots & \bar{x}_{\mathbb{U}}(0) \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$= \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2^H + \rho^2\boldsymbol{I}_{S+1} \in \mathbb{C}^{(S+1)\times(S+1)} \tag{4.24}$$

行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ を求めることに比べて，行列 $\boldsymbol{R}_T$ を求めるのは極めて簡単である．行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ の代わりに同様な役割を持つ行列 $\boldsymbol{R}_T$ を用いて MUSIC 法等を適用することが可能となり，S 個の到来波に対して到来方向を推定することが可能である．

以下に提案法のアルゴリズムをまとめる．

1. Pal 手法の 1. と同様にベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ を求める
2. 重複する仮想素子の相関値を平均し $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ を求める．
3. $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ に対して，式 (4.23) により，テプリッツ行列である相関行列 $\boldsymbol{R}_T$ を求める．
4. $\boldsymbol{R}_T$ に MUSIC 法等を適用し到来方向を推定する．

ここで，前者の改良点のみを行う場合を Proposed(+1) 法とし，後者の改良点のみを行う場合を Proposed(+2) 法とし，両方の改良を行う場合を Proposed(+12) 法と

する．以降，提案法には Proposed(+1) 法，Proposed(+2) 法と Proposed(+12) 法が含まれるものとする．

4.3 シミュレーションによる提案法の評価

ここでは，計算機シミュレーションを行なうことにより，提案法の有効性を示す．

4.3.1 シミュレーション環境と諸元

ここでは，**3.3.1** と同様のシミュレーション環境である Intel Core i7, 3.4 GHz, RAM 16 GB, Windows 7 64 ビット，MATLAB R2013a を用いて，以下の表 4.1 のシミュレーション諸元において，計算機シミュレーションにより提案法の到来方向の推定精度及び計算コストについて評価する．アレーの素子間隔の基準を到来波の半波長 ($d = \lambda/2$) とし，SNR は個々の到来波の電力とアレー素子毎に発生する熱雑音電力の比とする．また，全ての到来波は互いに無相関及び同電力であることを仮定する．

表 4.1: シミュレーション諸元

アレー素子数 $(2M+N-1)$	$12(M=4, N=5)$, $27(M=9, N=10)$
素子間隔の基準 d	0.5λ
到来波数 P	18
スナップショット数 K	$100 \sim 1,000; 300$ 刻み
入力 SNR	-20 dB$\sim$ 40 dB; 10 dB 刻み
試行回数	$2,000$ 回

ここでは，提案法のアルゴリズム中の 4. における到来方向を推定するアルゴリズムとしては，TLS-ESPRIT 法 [6] を適用する．TLS-ESPRIT 法を適用する理由を以下に説明する．TLS-ESPRIT 法は，ESPRIT 法の到来方向の推定精度を向上させたものであり，MUSIC 法と比べると，到来方向の推定精度が少し低下しているものの，推定速度が比較的速い手法である．提案法は，上に述べた 2 つの問題

点に対する改良法であるが，それらの改良点は相関行列 $\boldsymbol{R}_T$ を求めるまでの段階にあり，実際の到来方向推定処理とは関係ない．計算コストの比較は **4.3.3** で扱うが，提案法の全体の計算コストが減少するという利点を明確に示すため，$\boldsymbol{R}_T$ を求めるまでの過程の計算コストの減少が，どのように提案法全体の計算コストに影響を与えるかを示す必要がある．そのため，$\boldsymbol{R}_T$ を求めた後の推定処理の計算コストが小さい方が望ましいので，$\boldsymbol{R}_T$ に対して，TLS-ESPRIT 法を用いて到来方向を推定することにする．

4.3.2 到来方向推定誤差の比較

ここでは，**3.3.2** と同様に，到来方向の推定精度の誤差を表す RMSE を用いて，SNR とスナップショット数 K を変化させたときの提案法と Pal 手法の推定精度を比較する．アレー素子数を $12\,(M = 4, N = 5)$ にして，$P = 16\,(> 12)$ 個の到来波が $-61°, -53°, -45°, -36°, -28°, -21°, -12°, -5°, 6°, 14°, 23°, 30°, 39°, 48°, 57°, 65°$ の方向から到来すると仮定する．

ここでも，理論下限値の CRB を同時に示すが，**3.3.2** と異なり，Liu らによるコプライムアレーにおける CRB についての研究結果 [40] において，CRB は正規化した到来方向の $\bar{\theta} = \frac{d}{\lambda}\sin\theta$ に対して以下の式のように求めていることに注意する．

$$\mathrm{CRB}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{4\pi^2 K}\left(\boldsymbol{G}_0^H \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}}} \boldsymbol{G}_0\right)^{-1} \tag{4.25}$$

ここで，

$$\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{M}\big(\mathrm{diag}(\mathbb{D})\big)\boldsymbol{V}_{\mathbb{D}}\boldsymbol{D} \in \mathbb{C}^{|\mathbb{D}|\times P} \tag{4.26}$$

$$\boldsymbol{M} = \left(\boldsymbol{Z}^H(\boldsymbol{R}_y^T \otimes \boldsymbol{R}_y)^{-1}\boldsymbol{Z}\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}^{|\mathbb{D}|\times|\mathbb{D}|} \tag{4.27}$$

$$\boldsymbol{V}_{\mathbb{D}} = \left[\boldsymbol{v}_{\mathbb{D}}(\bar{\theta}_1), \boldsymbol{v}_{\mathbb{D}}(\bar{\theta}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_{\mathbb{D}}(\bar{\theta}_P)\right] \in \mathbb{C}^{|\mathbb{D}|\times P} \tag{4.28}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathbb{D}}(\bar{\theta}) = \left[\mathrm{e}^{-j2\pi\mathbb{D}(1)\bar{\theta}}, \mathrm{e}^{-j2\pi\mathbb{D}(2)\bar{\theta}}, \ldots, \mathrm{e}^{-j2\pi\mathbb{D}(|\mathbb{D}|)\bar{\theta}}\right]^T \tag{4.29}$$

$$\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}} = \left[\boldsymbol{V}_{\mathbb{D}}, \vec{\boldsymbol{1}}_n\right] \in \mathbb{C}^{|\mathbb{D}|\times(P+1)} \tag{4.30}$$

$$\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}}} = \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}})\Big((\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}})^H(\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}})\Big)^{-1}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}})^H \in \mathbb{C}^{|\mathbb{D}|\times|\mathbb{D}|} \tag{4.31}$$

となる．また，$\boldsymbol{Z}$ は $|\mathbb{S}|^2 \times |\mathbb{D}|$ 次の 2 値行列で，$\boldsymbol{Z}$ の m 列目が以下になる．

$$\boldsymbol{Z}(:, m) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_m),\ m \in \mathbb{D} \tag{4.32}$$

ただし，$\boldsymbol{I}_m$ は $|\mathbb{S}| \times |\mathbb{S}|$ 次正方行列で，$\boldsymbol{I}_m$ の (k, l) 成分を以下のように定義する．

$$I_m(k, l) = \begin{cases} 1, & k - l = m \\ 0, & k - l \neq m \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{S} \tag{4.33}$$

到来波は同電力であるため，$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_P = \sigma$ とする．SNR が無限大に近づけば，熱雑音電力を無視できるため，次のように得られる [40]．

$$\boldsymbol{R}_y^{-1} \xrightarrow{\text{large SNR}} (\sigma^2 \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)^{-1} = (\sigma^2 \boldsymbol{V}_{\mathbb{S}} \boldsymbol{V}_{\mathbb{S}}^H)^{-1} \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{M} \xrightarrow{\text{large SNR}} \left(\boldsymbol{Z}^H \big(((\sigma^2 \boldsymbol{V}_{\mathbb{S}} \boldsymbol{V}_{\mathbb{S}}^H)^{-1})^T \otimes (\sigma^2 \boldsymbol{V}_{\mathbb{S}} \boldsymbol{V}_{\mathbb{S}}^H)^{-1} \big) \boldsymbol{Z} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\boldsymbol{M}_\infty}{\sigma^2} \tag{4.35}$$

$$\boldsymbol{G}_0 \xrightarrow{\text{large SNR}} \frac{\boldsymbol{M}_\infty}{\sigma^2} \big(\mathrm{diag}(\mathbb{D})\big) \boldsymbol{V}_{\mathbb{D}} (\sigma^2 \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{G}_\infty \tag{4.36}$$

ここで，

$$\boldsymbol{V}_{\mathbb{S}} = \left[\boldsymbol{v}_{\mathbb{S}}(\bar{\theta}_1), \boldsymbol{v}_{\mathbb{S}}(\bar{\theta}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_{\mathbb{S}}(\bar{\theta}_P) \right] \tag{4.37}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathbb{S}}(\bar{\theta}) = \left[\mathrm{e}^{-j2\pi\mathbb{S}(1)\bar{\theta}}, \mathrm{e}^{-j2\pi\mathbb{S}(2)\bar{\theta}}, \ldots, \mathrm{e}^{-j2\pi\mathbb{S}(|\mathbb{S}|)\bar{\theta}} \right]^T \tag{4.38}$$

$$\boldsymbol{M}_\infty = \left(\boldsymbol{Z}^H \big(((\boldsymbol{V}_{\mathbb{S}} \boldsymbol{V}_{\mathbb{S}}^H)^{-1})^T \otimes (\boldsymbol{V}_{\mathbb{S}} \boldsymbol{V}_{\mathbb{S}}^H)^{-1} \big) \boldsymbol{Z} \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}^{|\mathbb{D}| \times |\mathbb{D}|} \tag{4.39}$$

$$\boldsymbol{G}_\infty = \boldsymbol{M}_\infty \big(\mathrm{diag}(\mathbb{D})\big) \boldsymbol{V}_{\mathbb{D}} \in \mathbb{C}^{|\mathbb{D}| \times P} \tag{4.40}$$

となる．このとき，式 (4.39) を式 (4.31) に代入すると $\boldsymbol{\Pi}^\perp_{\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}}}$ は $\boldsymbol{\Pi}^\perp_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_{\mathbb{D}}}$ となり，式 (4.25) が以下の式のようになる．

$$\underset{\text{large SNR}}{\mathrm{CRB}(\bar{\boldsymbol{\theta}})} = \frac{1}{4\pi^2 K} \big(\boldsymbol{G}_\infty^H \boldsymbol{\Pi}^\perp_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_{\mathbb{D}}} \boldsymbol{G}_\infty \big)^{-1} \tag{4.41}$$

ここで，$\boldsymbol{G}_\infty^H \boldsymbol{\Pi}^\perp_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_{\mathbb{D}}} \boldsymbol{G}_\infty$ が $P \times P$ 次正方行列である．CRB の値は式 (4.41) の行列の対角成分により求めることができる．

式 (4.31) に注目すると，$\boldsymbol{\Pi}^\perp_{\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}_{\mathbb{D}}}$ はエルミート行列であり，またべき等行列でもある [40]．ここで，行列 $\boldsymbol{X}$ がべき等行列とは，以下の式が成り立つことである．

$$\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{X} \tag{4.42}$$

従って，$\left(\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}}\right)^H \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}} = \left(\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}}\right)^2 = \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}}$ となる．そこで，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^P$ を任意の非零複素数のベクトルとすると，

$$\boldsymbol{z}^H\left(\boldsymbol{G}_\infty^H \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}} \boldsymbol{G}_\infty\right)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^H\left(\boldsymbol{G}_\infty^H \left(\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}}\right)^H \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}} \boldsymbol{G}_\infty\right)\boldsymbol{z} \tag{4.43}$$

$$= \|\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}} \boldsymbol{G}_\infty \boldsymbol{z}\|^2 \geq 0 \tag{4.44}$$

が得られる．等式が成り立つのは，$\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}} \boldsymbol{G}_\infty \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ のときのみとなる．すなわち，$\boldsymbol{v} = \Big((\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D})^H (\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D})\Big)^{-1} (\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D})^H \boldsymbol{G}_\infty \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{P+1}$ とすると，式 (4.31) より次の式が得られる．

$$\boldsymbol{G}_\infty \boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}_\infty \big(\mathrm{diag}(\mathbb{D})\big) \boldsymbol{V}_\mathbb{D} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D} \boldsymbol{v} \tag{4.45}$$

[40] より，$\boldsymbol{M}_\infty$ が非特異行列であるため，式 (4.45) より次式が得られる．

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\mathbb{D}) \boldsymbol{V}_\mathbb{D} & \boldsymbol{W}_\mathbb{D} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}_C} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ -\boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_C \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ -\boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{4.46}$$

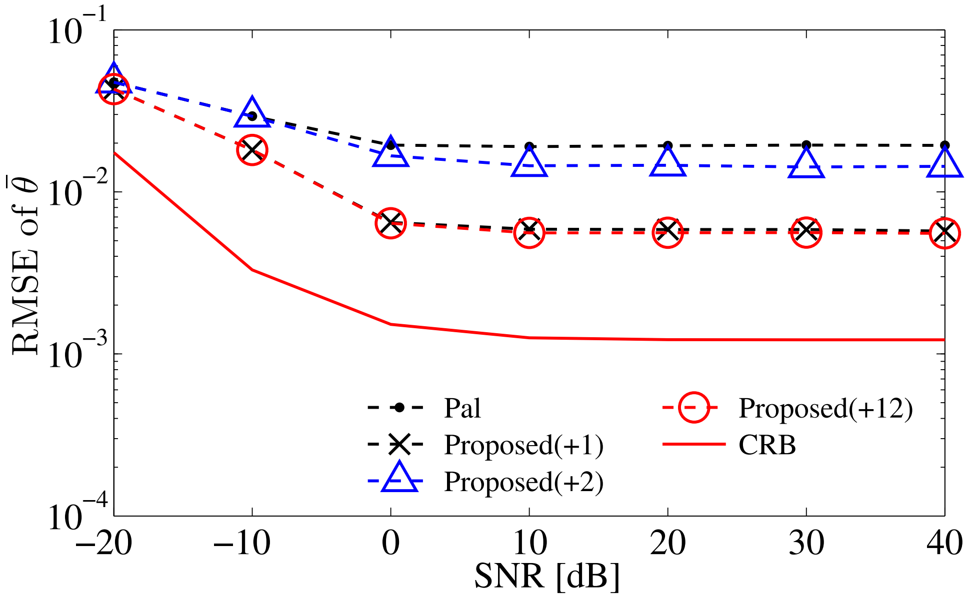
ここで，$\boldsymbol{A}_C$ は $|\mathbb{D}| \times (2P+1)$ 次行列で，列フルランクでランクは $(2P+1)$ となる．このとき，式 (4.46) が成り立つため，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ となる．従って，行列 $\boldsymbol{G}_\infty^H \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}} \boldsymbol{G}_\infty$ は正定値エルミート行列であり，その逆行列 $\left(\boldsymbol{G}_\infty^H \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}} \boldsymbol{G}_\infty\right)^{-1}$ も正定値行列となる．正定値行列の全ての固有値が 0 より大きく，また対角成分の総和が固有値の総和に等しいことを利用すると，$\left(\boldsymbol{G}_\infty^H \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\boldsymbol{M}_\infty \boldsymbol{W}_\mathbb{D}} \boldsymbol{G}_\infty\right)^{-1}$ の対角成分の総和が 0 より大きくなる．この理由により，CRB の値は 0 にならず，ある正の値になる．従って，コプライムアレーの CRB は一般のアレーの CRB と異なって，SNR が無限大になっても CRB はゼロにならず，一定の正の値に近づくことが特徴である．このことについて，後で出てくるシミュレーション結果により検証する．

まずは，スナップショット数 K がそれぞれ 100 と 400 の場合において，SNR の値を $-20\,\mathrm{dB}$ から $40\,\mathrm{dB}$ の $10\,\mathrm{dB}$ 刻みで変化させ，$2,000$ 回の試行回数での各手法の SNR に対する RMSE を比較した結果を図 4.3 に表す．

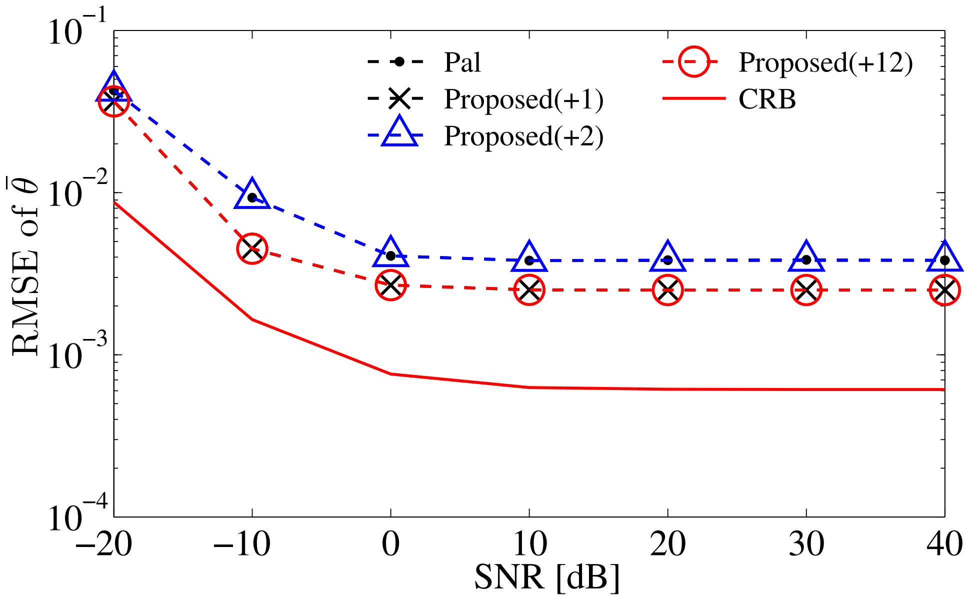
図 4.3(a) により，スナップショット数が少ない場合の $K = 100$ において，Proposed(+1) 法と Proposed(+12) 法の推定精度がほぼ同じであり，Pal 手法と Proposed(+2) 法の推定精度もほぼ同じである．SNR が $-20\,\mathrm{dB}$ より大きくなると，

Proposed(+1) 法と Proposed(+12) 法の推定精度が Pal 手法と Proposed(+2) 法の推定精度より大きく向上することが分かる．また，SNR> 20 dB のとき，CRB が安定しておりあまり変化しないとともに，各手法の RMSE も安定して変化しないことが分かる．

図 4.3(b) により，スナップショット数が多い場合の $K = 400$ において，Proposed(+1) 法と Proposed(+12) 法の推定精度がほぼ一致し，Pal 手法と Proposed(+2) 法の推定精度も一致する．SNR が -20 dB より大きくなると，Proposed(+1) 法と Proposed(+12) 法の推定精度が Pal 手法と Proposed(+2) 法の推定精度より少し向上することが分かる．また，SNR> 10 dB のとき，CRB が安定しておりあまり変化しないとともに，各手法の RMSE も安定して変化しないことが分かる．



(a) スナップショット数 $K = 100$ の場合



(b) スナップショット数 $K = 400$ の場合

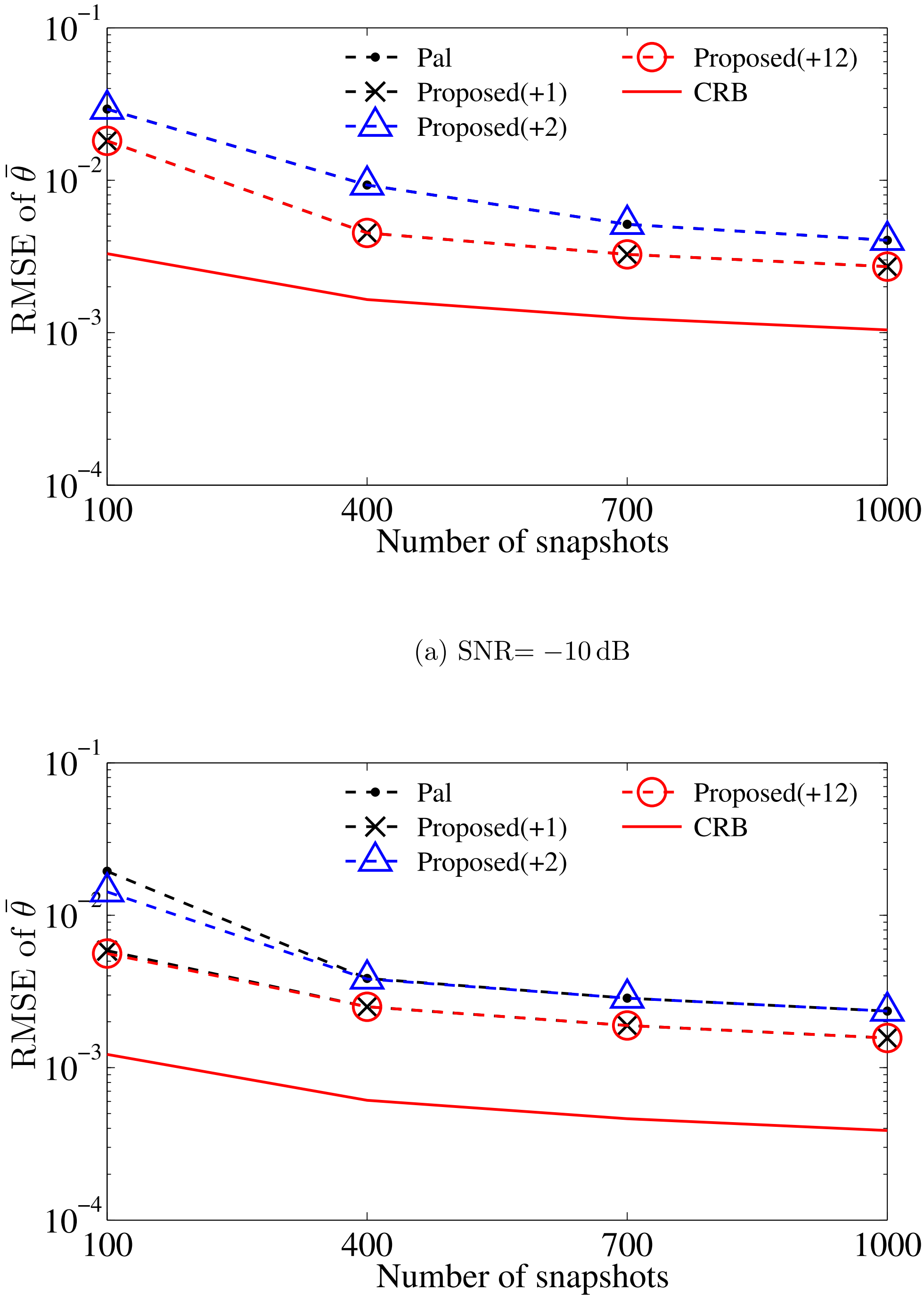
図 4.3: SNR に対する推定精度

次に，SNR の値がそれぞれ $-10\,\mathrm{dB}$ と $30\,\mathrm{dB}$ の場合において，K を 100 から $1,000$ の 300 刻みで変化させ，各手法のスナップショット数 K に対する RMSE を比較した結果を図 4.4 に表す．

図 4.4(a) から分かるように，SNR が $-10\,\mathrm{dB}$ の場合，図 4.3(b) と同じような傾向で，Proposed(+1) 法と Proposed(+12) 法の推定精度がほぼ一致し，Pal 手法と Proposed(+2) 法の推定精度もほぼ一致する．また，後者の 2 つの手法より，前者の 2 つの手法の推定精度が大きく向上できた．

図 4.4(b) では，SNR が $30\,\mathrm{dB}$ の場合，図 4.4(a) と同じような傾向で，Proposed(+1) 法と Proposed(+12) 法の推定精度がほぼ一致し，Pal 手法と Proposed(+2) 法の推定精度もほぼ一致する．

図 4.3 と図 4.4 の結果により，Pal 手法と Proposed(+2) 法の推定精度がほぼ同じであるため，第 2 の問題点に対する改良が推定精度の向上にはあまり関係ないことが分かる．一方で，Proposed(+1) 法と Proposed(+12) 法の推定精度がほぼ一致し，Pal 手法の推定精度より大きく向上できたため，第 1 の問題点に対する改良が推定精度の向上に効果が大きいと言える．



(a) SNR= −10 dB

(b) SNR= 30 dB

図 4.4: スナップショット数 K に対する推定精度

4.3.3 計算コストの比較

ここでは，提案法と Pal 手法の計算コストを比較するため，まずはそれぞれの手法の理論的演算回数を比較する．その後，**4.3.1** と同じシミュレーション環境下で，複数回実行させた際の推定時間の平均値を一回の推定時間とし，実際の測定値との比較を行う．

4.3.3.1 演算回数の比較

ここでは，Pal 手法，Proposed(+1) 法，Proposed(+2) 法と Proposed(+12) 法に対し，1 回の推定に要する演算回数について評価する．演算回数は主に受信信号の相関行列 $\boldsymbol{R}_y$ の計算，ベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ または $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ の計算，相関行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ またはテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_T$ の計算，そして TLS-ESPRIT 法による方向推定処理の 4 つの部分にかかると考える．

まず，受信信号の相関行列 $\boldsymbol{R}_y$ の計算処理において，演算回数 $\mathcal{O}\big(8KL^2\big)$ が必要となる．

次に，ベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ または $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ の計算に関して，ベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathbb{U}}$ を求めるには，既存の数値の代入処理のみを行えばよく，演算は不必要であるのに対して，ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ を求めるには，式 (4.21) により，演算回数 $\mathcal{O}\big(2L^2\big)$ となる．このため，Proposed(+1) 法及び Proposed(+12) 法では Pal 手法より演算回数 $\mathcal{O}\big(2L^2\big)$ が増加することになる．

次に，相関行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ の計算に関して，行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}k}$ を求めるため演算回数 $\mathcal{O}\big(6(S{+}1)^3\big)$ が必要となり，また式 (4.18) により行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ を求めるため，演算回数 $\mathcal{O}\big(2(S+1)^3\big)$ が必要となるので，合計演算回数 $\mathcal{O}\big(8(S+1)^3\big)$ となる．行列 $\boldsymbol{R}_T$ を求めるには，既存の数値の代入処理のみを行えばよく，演算は必要ないため，Proposed(+2) 法及び Proposed(+12) 法では Pal 手法より演算回数 $\mathcal{O}\big(8(S+1)^3\big)$ を減少することができる．

更に，求めた相関行列 $\boldsymbol{R}_{ss}$ または $\boldsymbol{R}_T$ に対する，TLS-ESPRIT 法による到来方向推定において，演算回数は主に固有値分解及び逆行列を求める処理にかかると考える．$(S+1)$ 次正方行列と P 次正方行列の固有値における計算回数が行列の列

数の 3 乗に比例すること [39] と，P 次正方行列の逆行列における計算回数も行列の列数の 3 乗に比例すること [38] を用いると，相関行列による方向推定処理における演算回数 $\mathcal{O}\big((S+1)^3+2P^3+32(S+1)P^2\big)$ が必要となる．これらより，提案法と Pal 手法の演算回数を表 4.2 にまとめる．

表 4.2: 演算回数の比較

到来方向推定手法	演算回数
Pal 手法	$\mathcal{O}\big(8KL^2+9(S+1)^3+2P^3+32(S+1)P^2\big)$
Proposed(+1) 法	$\mathcal{O}\big((8K+2)L^2+9(S+1)^3+2P^3+32(S+1)P^2\big)$
Proposed(+2) 法	$\mathcal{O}\big(8KL^2+(S+1)^3+2P^3+32(S+1)P^2\big)$
Proposed(+12) 法	$\mathcal{O}\big((8K+2)L^2+(S+1)^3+2P^3+32(S+1)P^2\big)$

表 4.2 により，第 1 の問題点に対する改良を適用する Proposed(+1) 法は Pal 手法より演算回数が $\mathcal{O}\big(2L^2\big)$ 増加する．しかし，第 2 の問題点に対する改良を適用する Proposed(+2) 法は Pal 手法より演算回数が $\mathcal{O}\big(8(S+1)^3\big)$ 減少できる．両方の改良を適用したときの Proposed(+12) 法は，Pal 手法より演算回数が $\mathcal{O}\big(8(S+1)^3-2L^2\big)$ 変化することが分かる．ここで，$L=2M+N-1, S=M(N+1)-1$ に注意すると，$8(S+1)^3-2L^2 \gg 0$ となるので，Proposed(+12) 法は，Pal 手法より演算回数が $\mathcal{O}\big(8(S+1)^3-2L^2\big)$ 減少することが分かる．

4.3.3.2 推定時間の比較

次に，**4.3.1** で示したシミュレーション環境下で，到来波数 $P=16$，スナップショット数 $K=100$，SNR=20 dB として，TLS-ESPRIT 法を用いて $2,000$ 回推定した際の推定時間を平均した推定速度に関して，提案法と Pal 手法を比較する．このとき，アレー素子数を 12 $(M=4, N=5)$ と 27 $(M=9, N=10)$ を変化させたときの，提案法と Pal 手法の推定速度を表 4.3 に示す．表 4.3 の結果により，アレー素子数が小さい時，それぞれの手法の推定速度の差が小さくほぼ同じであるが，アレー素子数が大きくなるに従って，各手法の推定速度の差が大きくなり，推定速度

が速い順に，Proposed(+2) 法，Proposed(+12) 法，Pal 手法及び Proposed(+1) 法となる．特に，アレー素子数 $= 27\,(M = 9, N = 10)$ の場合では，Proposed(+2) 法の推定速度が 2.391ms で一番速いのに対して，Pal 手法の推定速度が 6.858ms で，Proposed(+2) 法は約 3 倍高速化したと確認できた．表 4.3 の結果により，Pal 手法と Proposed(+1) 法の推定速度の差が少ないため，第 1 の問題点に対する改良は推定速度にあまり影響ないが，Proposed(+2) 法と Proposed(+12) 法が Pal 手法より推定速度を向上できたため，第 2 の問題点に対する改良が推定速度の向上に大きな効果があると言える．

表 4.3: Pal 手法と提案法の推定時間

到来方向推定手法	アレー素子数 $2M + N - 1$	
	$12\,(M = 4, N = 5)$	$27\,(M = 9, N = 10)$
Pal 手法	0.948 ms	6.858 ms
Proposed(+1) 法	0.957 ms	7.456 ms
Proposed(+2) 法	0.801 ms	2.391 ms
Proposed(+12) 法	0.877 ms	3.069 ms

4.4 4 章のまとめ

4.3.2 及び **4.3.3** に示した結果により，Proposed(+12) 法は Pal 手法より推定精度を向上することだけでなく，推定速度も向上できた．このため，本論文における最終的な提案法は両方の改良を行なった Proposed(+12) 法とする．提案法では，第 1 の問題点に対する改良を行なうことにより，推定精度を向上する効果があり，また第 2 の問題点に対する改良を行なうことにより，推定速度を向上する効果がある．さらに，両方の改良を行なうと，推定精度及び推定速度を向上する効果も確認できた [41].

これによって，提案法は，コプライムアレーを用いてアレー素子数以上の到来波に対して高精度かつ高速に到来方向推定できることが分かった．

第5章　未知の到来波数情報におけるアレー素子数以上の到来波に対する到来方向推定

第3章及び第4章では，個々の課題に対する解決策を示した．まず，第3章で未知の到来波数に対する到来波の方向推定法が実現できた．次に，第4章でアレー素子数以上の到来波に対する到来方向推定も実現できた．ここでは，2つの課題に同時に対処することを考える．すなわち，未知の到来波数情報におけるアレー素子数以上の到来波に対する到来方向推定について示す．

5.1　Liu手法

第4章において，Pal手法と提案法について説明したように，これらの手法では，コプライムアレー$\mathbb{S}$から素子数が多い差分アレー$\mathbb{D}$に拡張する．その後，連続した素子を抽出して仮想のULAである$\mathbb{U}$が得られる．このULAである$\mathbb{U}$に対してMUSIC法等の到来方向推定法を適用すると，到来方向推定ができる．

Pal手法と提案法では，差分アレー$\mathbb{D}$の連続した素子を抽出して仮想のULAである$\mathbb{U}$を求める際に，差分アレー$\mathbb{D}$の連続でない素子を無視した．これらの素子が除かれたことによって，次の二つの問題点が考えられる．まずは，得られる仮想のアレー$\mathbb{U}$の素子数が少なくなることに従い，対応できる到来波数が少なくなる．次に，$\mathbb{D}$の連続でない素子が無視されることによって，これらの素子が持つ到来方向情報が扱えないので到来方向の推定精度が低減する可能性があるということが考えられる．

これらの問題に対して，Liuらは核型ノルム[31]による補間を適用した解決策を

提案した [31]．これは，核型ノルムの最小化により，$\mathbb{D}$ で素子が存在しない位置の相関値を補間する．$\mathbb{D}$ が全ての位置に素子が存在するときを $\mathbb{V}$ とすると，$\mathbb{V}$ は以下のようになる．

$$\mathbb{V} = \{m \mid \min(\mathbb{D}) \leq m \leq \max(\mathbb{D})\}$$

ここで，$\mathbb{V}(k)\,(k = 1, \ldots, |\mathbb{V}|)$ を $\mathbb{V}$ の k 番目の要素とすると，アレーの素子の各位置は $\mathbb{V}(k)d$ となり，$\mathbb{V}$ は仮想 ULA となる．また，$\mathbb{V}$ の相関行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ を以下のように求める．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star} &= \underset{\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}} \in \mathbb{C}^{|\mathbb{V}^+| \times |\mathbb{V}^+|}}{\operatorname{argmin}} \ |\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}|_* \\ \text{subject to} \ \ \boldsymbol{R}_{\mathbb{L}} &= \boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^H,\ R_{\mathbb{L}}(m,n) = \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{D}}(m-n), \\ m, n \in \mathbb{V}^+ &= \{l \mid l \in \mathbb{V}, l \geq 0\},\ m - n \in \mathbb{D} \end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで，$|\cdot|_*$ は行列の核型ノルムを表し，その行列の特異値の総和である．$R_{\mathbb{L}}(m,n)$ は $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}$ の (m,n) 成分であり，$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{D}}(m-n)$ は差分アレー $\mathbb{D}$ の $(m-n)d$ の位置に配置した素子に対応する相関値の平均であり，以下のようになる．

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{D}}(q) = \frac{1}{|E_q^{\mathbb{D}}|} \sum_{l \in E_q^{\mathbb{D}}} \boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}(l),\ q = 1, \ldots, 2S+1 \tag{5.2}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}(l)$ は $\boldsymbol{x}_{\mathbb{D}}$ の l 番目の要素である．また，$E_q^{\mathbb{D}} = \{l \mid \mathbb{M}(l) = \mathbb{D}(q),\ l = 1, \ldots, L^2\}$ は多重集合 $\mathbb{M}$ の中で位置 $\mathbb{D}(q)$ に重複している素子の番号である．また，$\mathbb{V}$ は $|\mathbb{V}|\,(= 2(2M-1)N+1)$ 素子の仮想 ULA になり，受信信号ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{V}}$（要素数 $|\mathbb{V}|$）は以下のようになる．

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{V}} = \left[R_{\mathbb{L}}^{\star}(|\mathbb{V}^+|, 1), R_{\mathbb{L}}^{\star}(|\mathbb{V}^+|-1, 1), \ldots, R_{\mathbb{L}}^{\star}(1,1), R_{\mathbb{L}}^{\star}(1,2), \ldots, R_{\mathbb{L}}^{\star}(1, |\mathbb{V}^+|)\right]^T \tag{5.3}$$

ここで，図 5.1 を用いて説明する．図 5.1 では，$M = 3, N = 4$ の場合のコプライムアレー $\mathbb{S}$ から仮想 ULA である $\mathbb{U}$ または $\mathbb{V}$ に拡張する過程を示す．素子間隔の基準を $d = 1$ として，$\{0, 3, 6, 9\}$ の位置にある素子の ULA と $\{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$ の位置にある素子の ULA からなる素子位置の $\{0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 20\}$ のコプライムアレー $\mathbb{S}$ を考える．第 **4** 章の図 4.2 で説明したように，異なる 35 個の位置のアレー

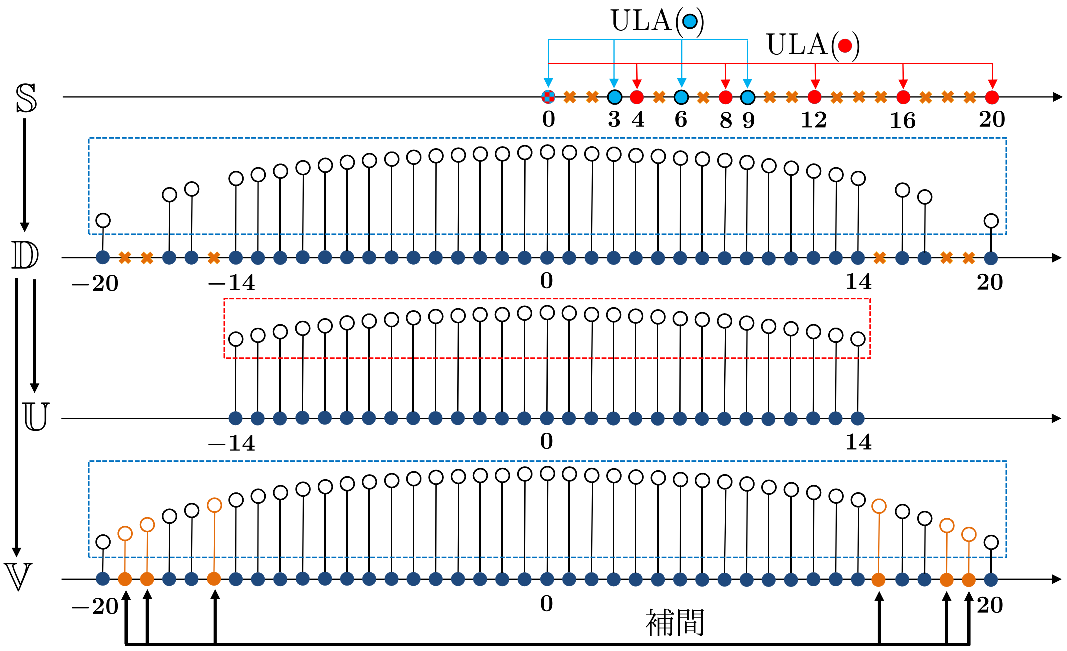


図 5.1: $M=3, N=4$ の場合の差分アレーに対する補間

素子が存在する差分アレー $\mathbb{D}$ が得られる．ここで，$\mathbb{D}$ では，位置 $\{\pm15, \pm18, \pm19\}$ には素子が存在しない．そのため第 **4** 章では，$\mathbb{D}$ の位置 $\{\pm16, \pm17, \pm20\}$ を除いて $\mathbb{U}$ を作った．Liu らは，$\mathbb{D}$ が持つ既存の素子を用いて，核型ノルムによる補間を行い，位置 $\{\pm15, \pm18, \pm19\}$ に仮想素子を生成し，$\mathbb{V}$ を作った．そのため，$\mathbb{V}$ は 41 素子の ULA となる．$\mathbb{V}$ は $\mathbb{U}$ より素子数が多いので，$\mathbb{V}$ を用いて到来方向推定すると，より多くの到来波に対応できる利点がある．また，$\mathbb{D}$ から $\mathbb{V}$ に拡張する際に，$\mathbb{D}$ の素子を除くことなく全て利用するので，到来方向の情報を失うことがないため，推定精度を向上する可能性がある．

以下に Liu 手法のアルゴリズムをまとめる．

1. **4** 章の提案法と同様に $\mathbb{S}$ を $\mathbb{D}$ に拡張した後に，式 (5.1) より核型ノルムによる補間を行い，$\mathbb{V}$ 及び $\mathbb{V}$ の相関行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ を求める．

2. $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ に対して，**4** 章の提案法と同様に MUSIC 法等を適用し，$(2M-1)N$ 個の到来波までに対して到来方向を推定できる．

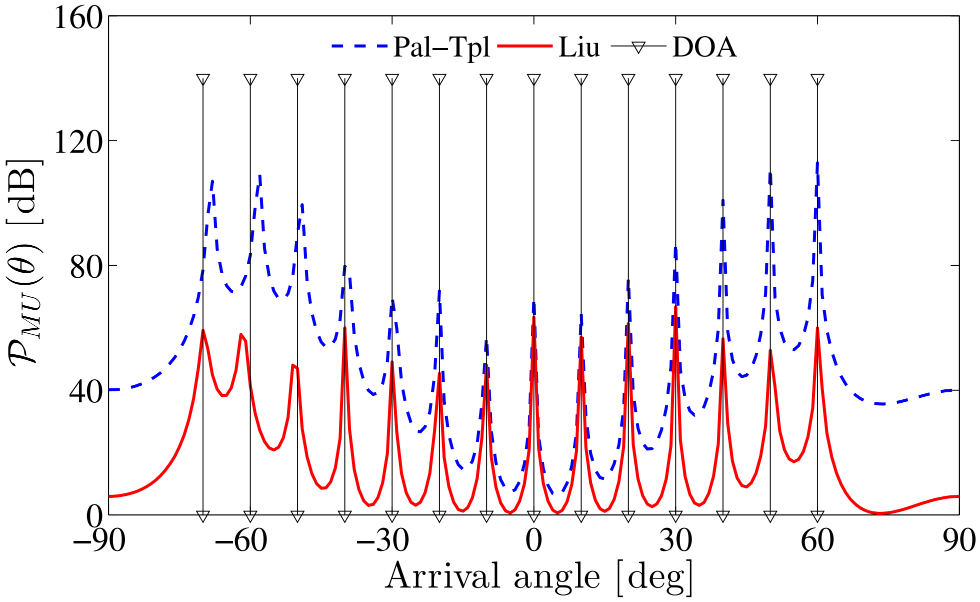
Liu 手法では，到来方向の情報を持つ差分アレー $\mathbb{D}$ に対して，既存のサンプルデー

タから核型ノルムによる補間を行い，仮想の ULA である $\mathbb{V}$ に拡張した．そのため，$\mathbb{V}$ と $\mathbb{D}$ は同じ到来方向の情報を持っていることが分かる．Pal 手法と提案法では，$\mathbb{D}$ から連続した素子の $\mathbb{U}$ を抽出したことで，連続していない素子を除いたことによって，$\mathbb{U}$ が持っている到来方向の情報は $\mathbb{D}$ が持っている到来方向の情報より少ないことが分かる．従って，$\mathbb{U}$ の持つ到来方向の情報は $\mathbb{V}$ の持つ到来方向の情報より少なくなる．このため，推定精度が低下する．さらに $\mathbb{V}$ のサイズが $\mathbb{U}$ のサイズより大きいので，Liu 手法は Pal 手法と提案法より，多くの到来波に対応できることになる [31].

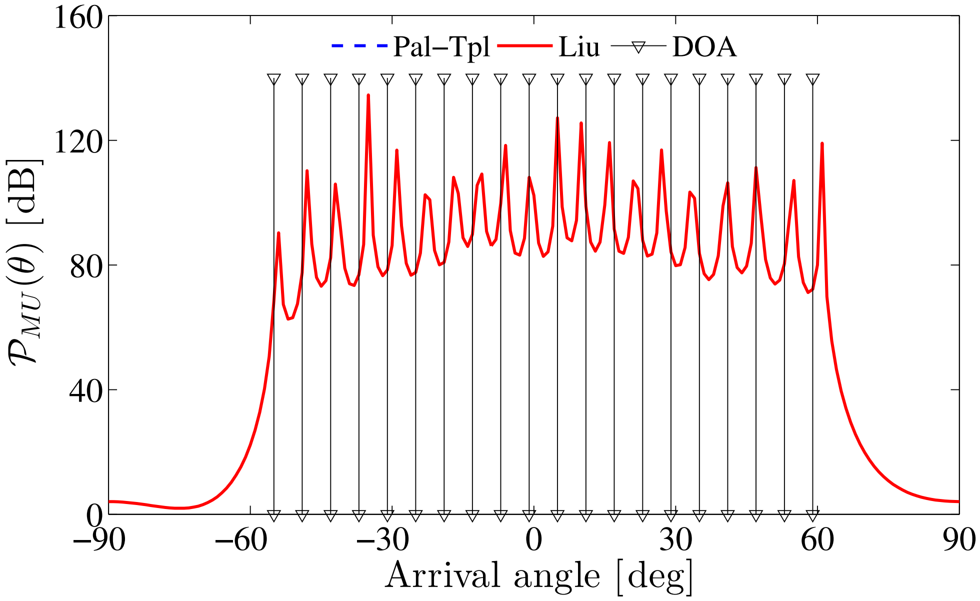
ここで，$M = 3, N = 4$ とすると，アレーアンテナ素子数は 10 となり，Liu 法は $(2M-1)N = 20$ 個の波までの到来波に対応可能となり，提案法は $M(N+1)-1 = 14$ 個の波に対応可能となる．これらのことを確かめるため，SNR=30 dB，スナップショット数 $K = 1,000$ に固定して，到来波数 P を変更させたときの Liu 手法と提案法による MUSIC スペクトラムの比較結果を図 5.2 で示す.

まず，$P = 14$ 個の到来波が $-70°, -60°, \ldots, 60°$ の $10°$ 刻みの方向から到来すると仮定する．このとき，到来波数は両手法が対応可能な到来波数以下になっているので，両手法の MUSIC スペクトラムが求められる．図 5.2(a) では，両手法のスペクトラムが確認でき，14 個の到来波の真の到来方向（DOA: ▽付きの黒い縦線）に対応する 14 個のピークが確認できた.

次に，到来波数を増やして，$P = 20\,(> 14)$ 個の到来波が $-55°, -49°, \ldots, 59°$ の $6°$ 刻みの方向から到来すると仮定する．図 5.2(b) より，実際の到来波数は提案法が対応可能な到来波数より大きいため，提案法の MUSIC スペクトラムが求められず，スペクトラムを確認することができない．しかし，Liu 手法の MUSIC スペクトラムには 20 個の到来波の真の到来方向に対応する 20 個のピークが確認できた．これらの結果は，上の理論値と対応している.



(a) 到来波数 $P = 14$ の場合



(b) 到来波数 $P = 20$ の場合

図 5.2: Liu 手法の対応できる到来波数

5.2　提案法の概要

ここで，第 **4** 章で説明した Pal 手法と提案法及び **5.1** で説明した Liu 手法により，コプライムアレーを用いて到来方向を推定することを以下の図 5.3 でまとめる．

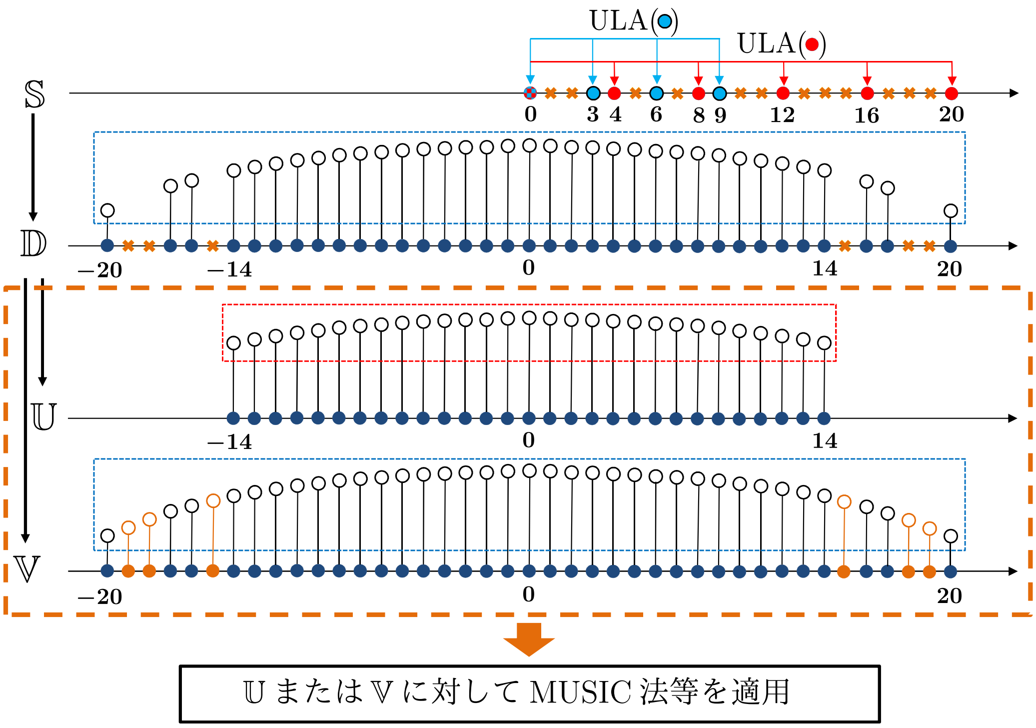


図 5.3: $M = 3, N = 4$ の場合のコプライムアレーによる到来方向推定

図 5.3 のように，コプライムアレー $\mathbb{S}$ から重複素子を持つ差分アレー $\mathbb{D}$ に拡張した後に，差分アレー $\mathbb{D}$ に対して，**4** 章の提案法のように仮想 ULA である $\mathbb{U}$ または，Liu 手法のように仮想 ULA である $\mathbb{V}$ に拡張した後に，これらの ULA に対して **2.2.1** で説明した MUSIC 法を適用して到来方向を推定できる．具体的には，$\mathbb{U}$ と $\mathbb{V}$ それぞれの相関行列を求めて，これらの相関行列に対して MUSIC 法を適用することになる．$\mathbb{U}$ と $\mathbb{V}$ の相関行列は以下のように求められる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}} &= \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}^{H} \\
\boldsymbol{R}_{\mathbb{V}} &= \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{V}}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{V}}^{H} \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

しかし，これらの行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ と $\boldsymbol{R}_{\mathbb{V}}$ のどちらのランクも 1 となりフルランクではない行列であるため，これらに対して MUSIC 法等を直接適用することができない．そこで，**4** 章の提案法では，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ の代わりに $\boldsymbol{R}_{T}$，Liu 手法では，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{V}}$ の代わりに $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ を求めて，$\boldsymbol{R}_{T}$ と $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ に対して MUSIC 法を適用している．

一方で，図 5.4 のように，第 **3** 章で説明した Qian 手法と提案法では，一般には中心対称の ULA に適用するが，$\mathbb{U}$ と $\mathbb{V}$ は素子数が奇数，つまり中心対称の仮想の ULA となっている．そして，Qian 手法と **3** 章の提案法は，相関行列のランクに関係なく，フルランクでない相関行列に対しても適用可能ということに注意すると，行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ と $\boldsymbol{R}_{\mathbb{V}}$ に対して Qian 手法の改良法を適用することができ，コプライムアレーを用いて，未知の到来波数に対しても到来方向推定可能となる [42], [43]．

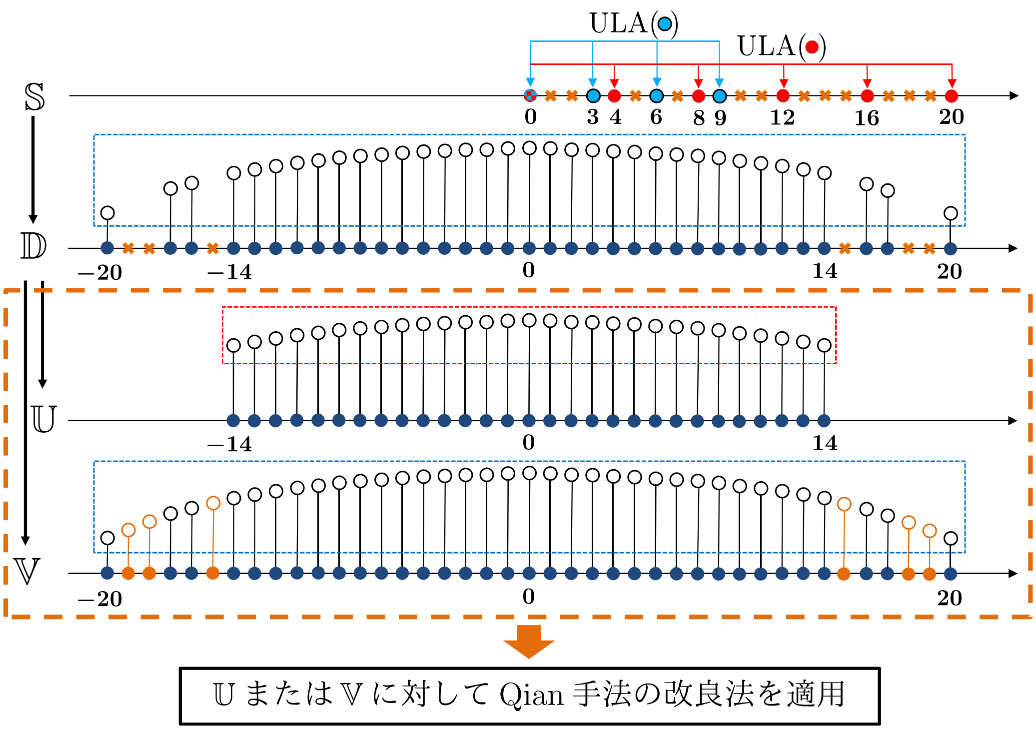


図 5.4: 提案法の概要

5.3　提案法

ここでは，**5.2** に基づいて提案法 [44] のアルゴリズムを説明する．

5.3.1 $\mathbb{U}$ を適用した提案法

ここでは，仮想 ULA である $\mathbb{U}$ に対して Qian 手法の改良法を適用することを考える．$S_{\mathbb{U}} = S = M(N+1)-1$ と置き，仮想 ULA である $\mathbb{U}$ の中央の素子を 0 番目として，**4.2** の結果を利用すると，$\mathbb{U}$ の受信信号ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ が以下のようになる．

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}} = [\bar{x}_{\mathbb{U}}(-S_{\mathbb{U}}), \ldots, \bar{x}_{\mathbb{U}}(-1), \bar{x}_{\mathbb{U}}(0), \ldots, \bar{x}_{\mathbb{U}}(S_{\mathbb{U}})]^T \tag{5.5}$$

式 (5.4) より，$\mathbb{U}$ の相関行列は $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}} = \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}^H$ となるので，これに式 (4.22) を代入して，$\boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}} = \boldsymbol{B}_1$ とすると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}} &= \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}^H \\ &= (\boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}}\boldsymbol{p} + \rho^2\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}})(\boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}}\boldsymbol{p} + \rho^2\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}})^H \\ &= \boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^H)(\boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}})^H + \rho^2(\boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}}\boldsymbol{p}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}^H + \vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}})^H + \rho^2\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}^H)\end{aligned} \tag{5.6}$$

ここで，$\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}} \in \mathbb{R}^{(2S_{\mathbb{U}}+1)\times 1}$ は，$(S_{\mathbb{U}}+1)$ 番目の成分のみが 1 でそれ以外全ての成分は 0 となるベクトルである．また，次のように，

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^H \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}} = \boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}}\boldsymbol{p}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}^H + \vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}\boldsymbol{p}^H(\boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}})^H + \rho^2\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}^H \tag{5.8}$$

と置くと，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ は次式のようになる．

$$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}} = \boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}})^H + \rho^2\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}} \tag{5.9}$$

ここで，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ は $(2S_{\mathbb{U}}+1)$ 次正方行列であり，これに対し Qian 手法の改良法を導入し，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ の $m\,(=-S_{\mathbb{U}}, \ldots, 0)$ 行目を用いて次のテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ を作る．

$$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)} = \begin{bmatrix} R_{\mathbb{U}}(m,0) & R_{\mathbb{U}}(m,1) & \cdots & R_{\mathbb{U}}(m,S_{\mathbb{U}}) \\ R_{\mathbb{U}}(m,-1) & R_{\mathbb{U}}(m,0) & \cdots & R_{\mathbb{U}}(m,S_{\mathbb{U}}-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\mathbb{U}}(m,-S_{\mathbb{U}}) & R_{\mathbb{U}}(m,-S_{\mathbb{U}}+1) & \cdots & R_{\mathbb{U}}(m,0) \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$= \boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}}\boldsymbol{\omega}_m(\boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}})^H + \rho^2\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)} \in \mathbb{C}^{(S_{\mathbb{U}}+1)\times(S_{\mathbb{U}}+1)} \tag{5.11}$$

ここで，$\boldsymbol{\omega}_m = \mathrm{diag}\left\{\sigma_1^2\beta_m, \ldots, \sigma_P^2\beta_m\right\}$ とし，$\beta_m = \sum_{i=1}^{P} \sigma_i^2 \mathrm{e}^{j\pi m \sin\theta_i}$ とする．また，

$$\boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}} = \boldsymbol{B}_2 = [\boldsymbol{b}_2^{\mathbb{U}}(\theta_1), \boldsymbol{b}_2^{\mathbb{U}}(\theta_2), \ldots, \boldsymbol{b}_2^{\mathbb{U}}(\theta_P)] \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{b}_2^{\mathbb{U}}(\theta) = \boldsymbol{b}_2(\theta) = \left[1, \mathrm{e}^{j\pi\sin\theta}, \ldots, \mathrm{e}^{j\pi(S_{\mathbb{U}}-1)\sin\theta}, \mathrm{e}^{j\pi S_{\mathbb{U}}\sin\theta}\right]^T \tag{5.13}$$

となり，$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ は $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ と同じように $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}$ の m 行目をテプリッツ行列にしたものである．

ここで，式 (5.11) に注目すると，**3.1.2** の式 (3.15) と同様な形を持つ．式 (5.11) の右辺の $\rho^2\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ を無視すれば，次式が得られる．

$$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)} = \boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}}\boldsymbol{\omega}_m(\boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}})^H \tag{5.14}$$

この式により，各テプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ が $\boldsymbol{B}_2$ により同時対角化可能であるため，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ と $\boldsymbol{B}_2$ が同じ列空間を張るため $\mathrm{span}\left\{\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)}\right\} = \mathrm{span}\left\{\boldsymbol{B}_2\right\}$ となるので，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ により到来方向を推定することができる．実際には，雑音電力が存在するため，$\rho^2\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ が無視できないので，Qian 手法の改良法と同様に，雑音電力 ρ^2 を推定して $\rho^2\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ の項を $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ から削除する必要がある．しかし，式 (5.8) より，$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ が ρ^2 に依存するため未知となり，$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ の形も第 **3** 章の提案法より少し複雑になるため，何らかの方法で $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ を推定する必要がある．

まず，雑音電力 ρ^2 の推定について説明する．**4.2** の式 (4.24) より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_T &= \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_2^H + \rho^2\boldsymbol{I}_{S+1} \in \mathbb{C}^{(S+1)\times(S+1)} \\ &= \boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}^{\mathbb{U}})_2^H + \rho^2\boldsymbol{I}_{S_{\mathbb{U}}+1} \in \mathbb{C}^{(S_{\mathbb{U}}+1)\times(S_{\mathbb{U}}+1)}\end{aligned} \tag{5.15}$$

となっているが，上の式の右辺に注目すると，行列 $\boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}^{\mathbb{U}})_2^H$ のランクは P となっている．行列 $\boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}^{\mathbb{U}})_2^H$ の固有値を $\zeta_i\,(i = 1, \ldots, S_{\mathbb{U}}+1)$ として下降する順に並び替えると，**2.2.1** で説明したように，以下の関係が成り立つ．

$$\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \cdots \geq \zeta_P > \zeta_{P+1} = \zeta_{P+2} = \cdots = \zeta_{S_{\mathbb{U}}+1} = 0 \tag{5.16}$$

ここで，$\boldsymbol{R}_T$ の固有値を $\eta_i\,(i = 1, \ldots, S_{\mathbb{U}}+1)$ とすると，以下の関係が成り立つ．

$$\eta_i = \zeta_i + \rho^2 \tag{5.17}$$

このため，$\boldsymbol{R}_T$ の固有値を下降する順に並び替えると，以下の関係が得られる．

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \cdots \geq \eta_P > \eta_{P+1} = \eta_{P+2} = \cdots = \eta_{S_{\mathbb{U}}+1} = \rho^2 > 0 \tag{5.18}$$

これによって，雑音電力を $\mathbb{U}$ の相関行列の $\boldsymbol{R}_T$ の最小の固有値として次式のように推定する．

$$\hat{\rho}^2 = \min \mathrm{eig}\left\{\boldsymbol{R}_T\right\} \tag{5.19}$$

次に，$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ の推定について説明する．式 (3.38) の $\boldsymbol{I}_{(M+1,m)}$ と違って，$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ はより複雑な形を持つ．つまり，$m \neq 0$ のときの $S_{\mathbb{U}}$ 個の $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ は対角行列となり，$m = 0$ のときの $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ が正方行列で全ての成分は非ゼロとなる．式 (5.19) で推定した $\hat{\rho}^2$ を式 (4.22) に代入し，$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbb{U}} = \boldsymbol{B}_1^{\mathbb{U}}\boldsymbol{p}$ と置くと，$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbb{U}}$ の推定値は $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbb{U}} = \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}} - \hat{\rho}^2\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}$ となる．求めた $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbb{U}}$ を式 (5.8) に代入すると，$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}$ の推定値である $\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbb{U}}$ は次式のようになる．

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbb{U}} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbb{U}}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}^H + \vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbb{U}}^H + \hat{\rho}^2\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{U}}^H \tag{5.20}$$

式 (5.20) で求めた $\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbb{U}}$ により，$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ の推定値である $\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ を求めることができる．そして，雑音成分を削除したテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ を $\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ とすると，$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ は以下のようになる．

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{U}}^{(m)} = \boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}^{(m)} - \hat{\rho}^2\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbb{U}}^{(m)} = \boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}}\boldsymbol{\omega}_m(\boldsymbol{B}_2^{\mathbb{U}})^H \tag{5.21}$$

以降は，Qian 手法と同様に以下のスペクトラム関数 $\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\theta)$ が得られる．

$$\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\theta) = \frac{1}{S_{\mathbb{U}} + 1 - \max \mathrm{eig}\{\boldsymbol{G}_{\mathbb{U}}^H(\theta)\boldsymbol{F}_{\mathbb{U}}^{\dagger}\boldsymbol{G}_{\mathbb{U}}(\theta)\}} \tag{5.22}$$

ここで，$\boldsymbol{F}_{\mathbb{U}}$ と $\boldsymbol{G}_{\mathbb{U}}(\theta)$ は以下のように求める．

$$\boldsymbol{F}_{\mathbb{U}} = \sum_{m=-S_{\mathbb{U}}}^{0} (\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{U}}^{(m)})^H\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{U}}^{(m)} \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{G}_{\mathbb{U}}(\theta) = \left[(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{U}}^{(-S_{\mathbb{U}})})^H\boldsymbol{b}_2^{\mathbb{U}}(\theta), \ldots, (\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{U}}^{(0)})^H\boldsymbol{b}_2^{\mathbb{U}}(\theta)\right] \tag{5.24}$$

ここで，$\boldsymbol{F}_{\mathbb{U}}^{\dagger}$ は $\boldsymbol{F}_{\mathbb{U}}$ の擬似逆行列である．スペクトラム関数 $\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\theta)$ を角度 θ に対してスキャンすると $(S_{\mathbb{U}}+1)$ の到来波まで到来方向を推定できる．

以下に $\mathbb{U}$ に対する提案法のアルゴリズムをまとめる．

1. **4** 章の提案法と同様に $\mathbb{S}$ を $\mathbb{U}$ に拡張した後に $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ を求め，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{U}}$ を求める．

2. **3** 章の提案法と同様に，式 (5.19) より雑音電力を相関行列 $\boldsymbol{R}_T$ の最小の固有値として推定し，$\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbb{U}}^{(m)}, \hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{U}}^{(m)}$ を求め，式 (5.23) と式 (5.24) により $\boldsymbol{F}_{\mathbb{U}}$ と $\boldsymbol{G}_{\mathbb{U}}(\theta)$ を求める．

3. 式 (5.22) によりスペクトラム関数 $\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\theta)$ を求め，これのピークにより到来方向を推定する．

5.3.2　$\mathbb{V}$ を適用した提案法

5.3.1 では，$\mathbb{U}$ に対して **3** 章の提案法を適用した場合の提案法を説明した．ここでは，同じように $\mathbb{V}$ に対して **3** 章の提案法を適用した場合の提案法について説明する．

このため，**5.3.1** の $\mathbb{U}$ を $\mathbb{V}$ に書き換えて，同様に以下のスペクトラム関数 $\mathcal{P}_{\mathbb{V}}(\theta)$ が得られる．

$$\mathcal{P}_{\mathbb{V}}(\theta) = \frac{1}{S_{\mathbb{V}} + 1 - \max \operatorname{eig}\{\boldsymbol{G}_{\mathbb{V}}^{H}(\theta)\boldsymbol{F}_{\mathbb{V}}^{\dagger}\boldsymbol{G}_{\mathbb{V}}(\theta)\}} \tag{5.25}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbb{V}} &= (2M-1)N,\ m = -S_{\mathbb{V}}, \ldots, 0 \\
\boldsymbol{R}_{\mathbb{V}}^{(m)} &= \begin{bmatrix} R_{\mathbb{V}}(m,0) & R_{\mathbb{V}}(m,1) & \cdots & R_{\mathbb{V}}(m,S_{\mathbb{V}}) \\ R_{\mathbb{V}}(m,-1) & R_{\mathbb{V}}(m,0) & \cdots & R_{\mathbb{V}}(m,S_{\mathbb{V}}-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\mathbb{V}}(m,-S_{\mathbb{V}}) & R_{\mathbb{V}}(m,-S_{\mathbb{V}}+1) & \cdots & R_{\mathbb{V}}(m,0) \end{bmatrix} && (5.26) \\
\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{V}}^{(m)} &= \boldsymbol{R}_{\mathbb{V}}^{(m)} - \hat{\rho}^2 \hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbb{V}}^{(m)} && (5.27) \\
\hat{\rho}^2 &= \min \mathrm{eig}\left\{\boldsymbol{R}_T\right\} && (5.28) \\
\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbb{V}} &= \bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{V}} - \hat{\rho}^2 \vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{V}} && (5.29) \\
\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbb{V}} &= \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbb{V}} \vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{V}}^H + \vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{V}} \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbb{V}}^H + \hat{\rho}^2 \vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{V}} \vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{V}}^H && (5.30) \\
\boldsymbol{F}_{\mathbb{V}} &= \sum_{m=-S_{\mathbb{V}}}^{0} (\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{V}}^{(m)})^H \hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{V}}^{(m)} && (5.31) \\
\boldsymbol{G}_{\mathbb{V}}(\theta) &= \left[(\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{V}}^{(-S_{\mathbb{V}})})^H \boldsymbol{b}_2^{\mathbb{V}}(\theta), \ldots, (\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathbb{V}}^{(0)})^H \boldsymbol{b}_2^{\mathbb{V}}(\theta)\right] && (5.32) \\
\boldsymbol{b}_2^{\mathbb{V}}(\theta) &= \left[1, \mathrm{e}^{j\pi \sin\theta}, \ldots, \mathrm{e}^{j\pi(S_{\mathbb{V}}-1)\sin\theta}, \mathrm{e}^{j\pi S_{\mathbb{V}} \sin\theta}\right]^T && (5.33)
\end{aligned}
$$

となり，$\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{R}^{(2S_{\mathbb{V}}+1)\times 1}$ は，$(S_{\mathbb{V}}+1)$ 番目の成分のみが 1 でそれ以外全ての成分は 0 となるベクトルである．また，$\boldsymbol{F}_{\mathbb{V}}^{\dagger}$ は $\boldsymbol{F}_{\mathbb{V}}$ の擬似逆行列である．スペクトラム関数 $\mathcal{P}_{\mathbb{V}}(\theta)$ を角度 θ に対してスキャンすると $(S_{\mathbb{V}}+1)$ の到来波まで到来方向を推定できる．

以下に $\mathbb{V}$ に対する提案法のアルゴリズムをまとめる．

1. **4** 章の提案法と同様に $\mathbb{S}$ を $\mathbb{V}$ に拡張した後に $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{V}}$ を求め，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{V}}$ を求める．
2. **3** 章の提案法と同様に，式 (5.19) より雑音電力を相関行列 $\boldsymbol{R}_T$ の最小の固有値として推定し，式 (5.31) と式 (5.32) により $\boldsymbol{F}_{\mathbb{V}}$ と $\boldsymbol{G}_{\mathbb{V}}(\theta)$ を求める．
3. 式 (5.25) によりスペクトラム関数 $\mathcal{P}_{\mathbb{V}}(\theta)$ を求め，これのピークにより到来方向を推定する．

5.4 シミュレーションによる提案法の評価

ここでは，計算機シミュレーションを行なうことにより，それぞれの $\mathbb{U}$ また $\mathbb{V}$ に対する提案法の有効性を示す.

5.4.1 シミュレーション環境と諸元

ここでは，**3.3.1** と同様のシミュレーション環境である Intel Core i7, 3.4 GHz, RAM 16 GB, Windows 7 64 ビット，MATLAB R2013a を用いて，以下の表 5.1 のシミュレーション諸元において計算機シミュレーションにより提案法の有効性を示す．SNR は個々の到来波の電力とアレー素子毎に発生する熱雑音電力の比とする．また，各到来波は同電力で互いに無相関であることを仮定する．ここで，**4** 章の提案法の Proposed(+12) 法を Pal-Tpl 法とし，到来波数が既知の場合では，Pal-Tpl 法と Liu 手法を扱う．なお，Pal-Tpl 法と Liu 手法の到来方向推定処理は MUSIC 法を適用とすることを前提とする．到来波数が未知の場合，高精度な到来波数推定法である M-MENSE 法により，到来波数を推定してから Pal-Tpl 法または Liu 手法を用いて到来方向を推定するものを，それぞれ Pal-Tpl-MMENSE 法と Liu-MMENSE 法とする．到来波数推定なしで，直接到来方向を推定するものは MUSIC-like 法 [21] 及び提案法とする．

提案法を DECAU(**D**OA **E**stimation method for **C**oprime **A**rrays with **U**nknown number of sources) とし，$\mathbb{U}$ に適用する場合を DECAU-Pal 法とし，$\mathbb{V}$ に適用する

表 5.1: シミュレーション諸元

アレー素子数 $(2M+N-1)$	$10\,(M=3,N=5); 12\,(M=4,N=5)$
到来波数 P	13
DOA	$-65^\circ \sim 55^\circ; 10^\circ$ 刻み
スナップショット数 K	$100 \sim 1,000; 300$ 刻み
入力 SNR	-20 dB$\sim$ 40 dB; 10 dB 刻み
試行回数 T	$2,000$ 回

場合を DECAU-Liu 法とする．

まずは，対応できる到来波数に関する比較を行う．次に，到来方向推定の平均二乗誤差（RMSE）を用いて，提案法と従来法の推定精度を比較する．最後に，提案法と従来法の計算コストについて評価をする．

5.4.2 対応できる到来波数の比較

ここでは，$L\,(=2M+N-1)$ 素子のコプライムアレー $\mathbb{S}$ を考え，各手法が対応できる到来波数を表 5.2 に示す．表 5.2 により，$\mathbb{S}$ は L 個の物理的な素子の線形アレーに対し，MUSIC 法を用いると $L-1\,(=2M+N-2)$ 個のみの到来波に対して到来方向を推定することができる．Pal 手法及び提案法である Pal-Tpl 法は，$(2S_{\mathbb{U}}+1)$ 素子の仮想 ULA である $\mathbb{U}$ に対して，$S_{\mathbb{U}}$ 個までの到来波数に対応可能となる．Liu 手法では，$(2S_{\mathbb{V}}+1)$ 素子の仮想 ULA である $\mathbb{V}$ に対して，$S_{\mathbb{V}}$ 個までの到来波数に対応可能となり，Pal 手法及び Pal-Tpl 法より多くの到来波に対応可能となる．

しかし，DECAU-Pal 法は Pal 手法及び Pal-Tpl 法より 1 波多く対応でき，$(S_{\mathbb{U}}+1)$ 個の到来波に対応可能となる．また，DECAU-Liu 法は Liu 手法より 1 波多く対応でき，$(S_{\mathbb{V}}+1)$ 個の到来波に対応可能となり，最も多い $N(2M-1)+1$ 個の到来波まで対応できる．

表 5.2: 対応可能な到来波数

到来方向推定手法		対応できる到来波数	アレー素子数 $2M+N-1$ $=10\,(M=3,N=5)$
MUSIC 法		$L-1=2M+N-2$	9
Pal 手法		$S_{\mathbb{U}}=M(N+1)-1$	17
Liu 手法		$S_{\mathbb{V}}=N(2M-1)$	25
提案法	Pal-Tpl 法	$S_{\mathbb{U}}=M(N+1)-1$	17
	DECAU-Pal 法	$S_{\mathbb{U}}+1=M(N+1)$	18
	DECAU-Liu 法	$S_{\mathbb{V}}+1=N(2M-1)+1$	26

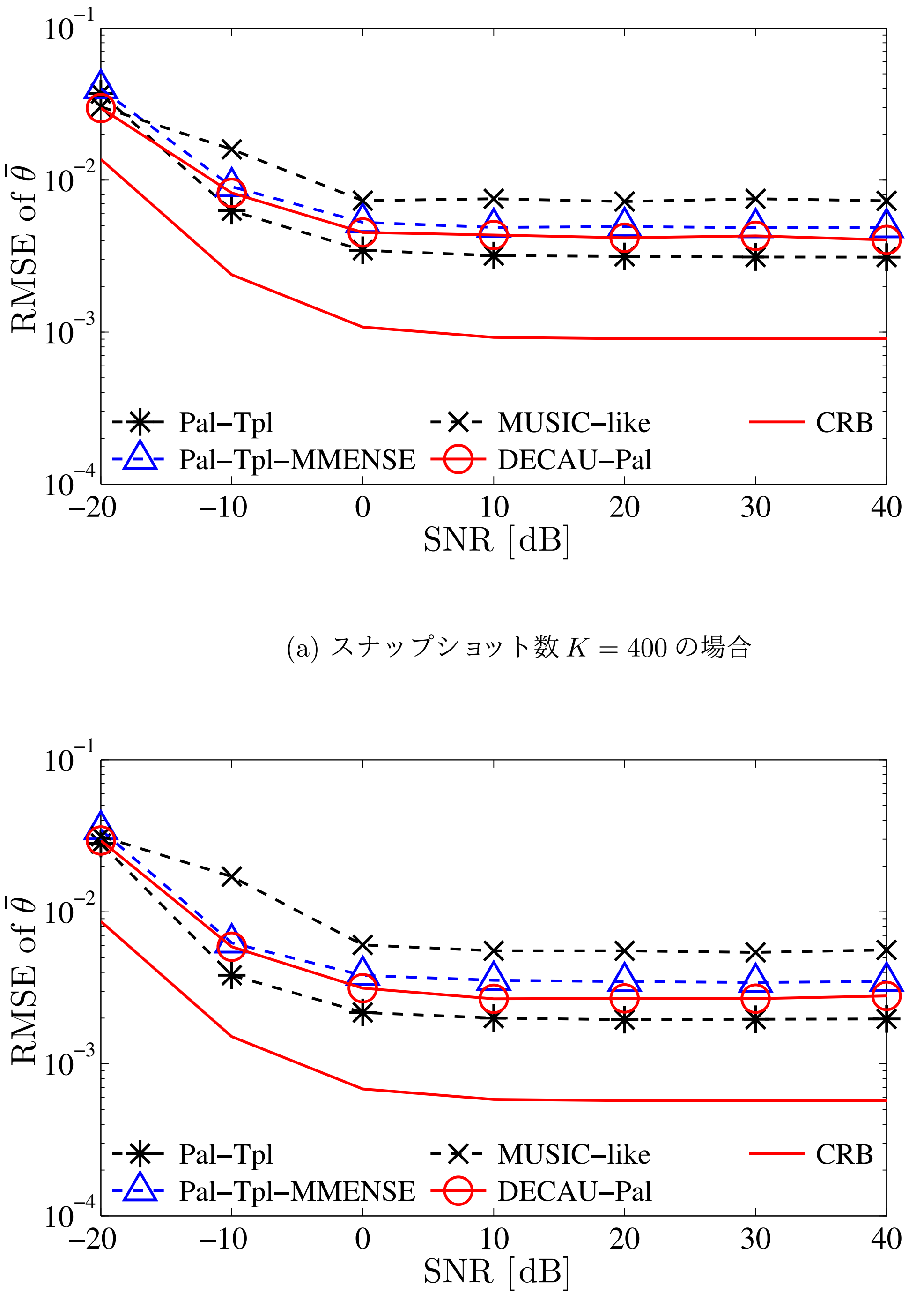
5.4.3　到来方向推定誤差の比較

ここでは，**4.3.2** と同様に，正規化した到来方向の $\bar{\theta} = \frac{d}{\lambda}\sin\theta$ に対しての誤差を表す RMSE を用いて，SNR とスナップショット数 K を変化させたときの各手法の推定精度を比較する．このとき，$M = 3, N = 5$ にすると，コプライムアレー素子数は 10 となり，$P = 13\,(> 10)$ 波が $-65°, -55°, \ldots, 55°$ の $10°$ の刻みの方向から到来すると仮定する．

まずは，$\mathbb{U}$ を適用した場合の DECAU-Pal 法，**4** 章の提案法である Pal-Tpl 法，Pal-Tpl-MMENSE 法と MUSIC-like 法の $\bar{\theta}$ の RMSE を比較する．スナップショット数 K がそれぞれ 400 と $1,000$ の場合において，SNR の値を $-20\,\mathrm{dB}$ から $40\,\mathrm{dB}$ の $10\,\mathrm{dB}$ 刻みで変化させ，$2,000$ 回の試行回数での各手法の $\bar{\theta}$ の SNR に対する RMSE を比較した結果を図 5.5 に表す．

図 5.5(a) より，スナップショット数 $K = 400$ の場合，DECAU-Pal 法の RMSE が Pal-Tpl 法の RMSE と近づいて，高い推定精度を得ていることが分かる．ここで，Pal-Tpl 法では，到来波数が既知としているが，DECAU-Pal 法では到来波数は未知であることに注意する必要がある．また，到来波数が未知の場合，M-MENSE 法により到来波数を推定してから Pal-Tpl 法を適用する Pal-Tpl-MMENSE 法の推定精度が DECAU-Pal 法の推定精度より低下していることが分かる．この理由は，M-MENSE 法により到来波数の推定が正確にできないことがあるからである．MUSIC-like 法の推定精度が最も低いことが明らかである．

図 5.5(b) より，スナップショット数 $K = 1,000$ の場合，図 5.5(a) と同じ傾向となり，DECAU-Pal 法は到来波数が未知でもその推定精度は，Pal-Tpl 法の次となる．



(a) スナップショット数 $K = 400$ の場合

(b) スナップショット数 $K = 1,000$ の場合

図 5.5: $\mathbb{U}$ を適用した提案法の $\bar{\theta}$ の SNR に対する推定精度

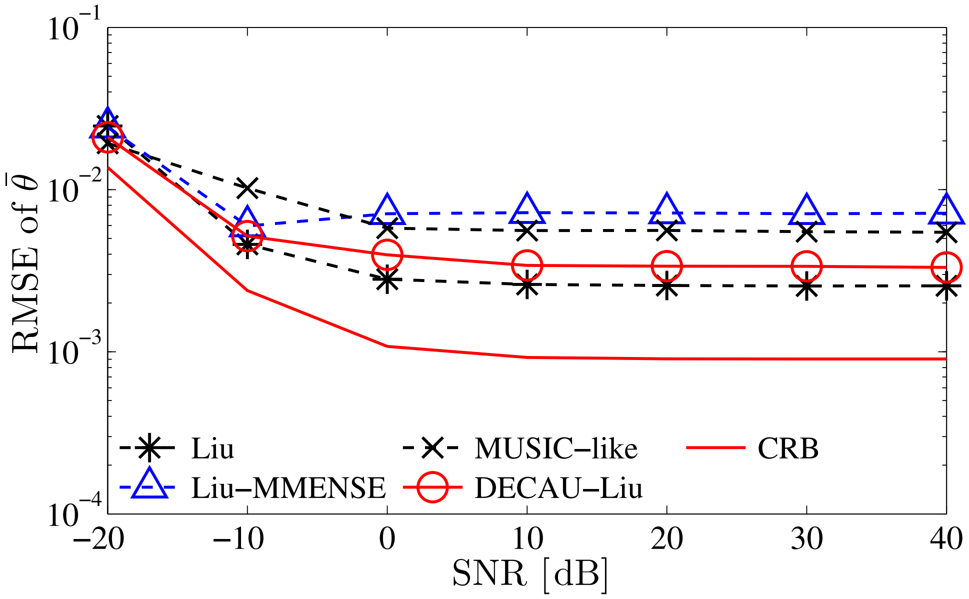
次に，$\mathbb{V}$を適用した場合のDECAU-Liu法，Liu手法，Liu-MMENSE法とMUSIC-like法の$\bar{\theta}$のRMSEを比較する．スナップショット数Kがそれぞれ400と$1,000$の場合において，SNRの値を-20 dBから40 dBの10 dB刻みで変化させ，$2,000$回の試行回数での各手法の$\bar{\theta}$のSNRに対するRMSEを比較した結果を図5.6に表す．

図5.6(a)より，スナップショット数$K=400$の場合，DECAU-Liu法のRMSEがLiu手法のRMSEと近づいて，高い推定精度を得ていることが分かる．ここで，Liu法では，到来波数が既知としているが，DECAU-Liu法では到来波数は未知であることに注意する必要がある．また，SNR>0 dBのとき，到来波数が未知の場合，Liu-MMENSE法の推定精度がMUSIC-like法より低下していて最も低い．

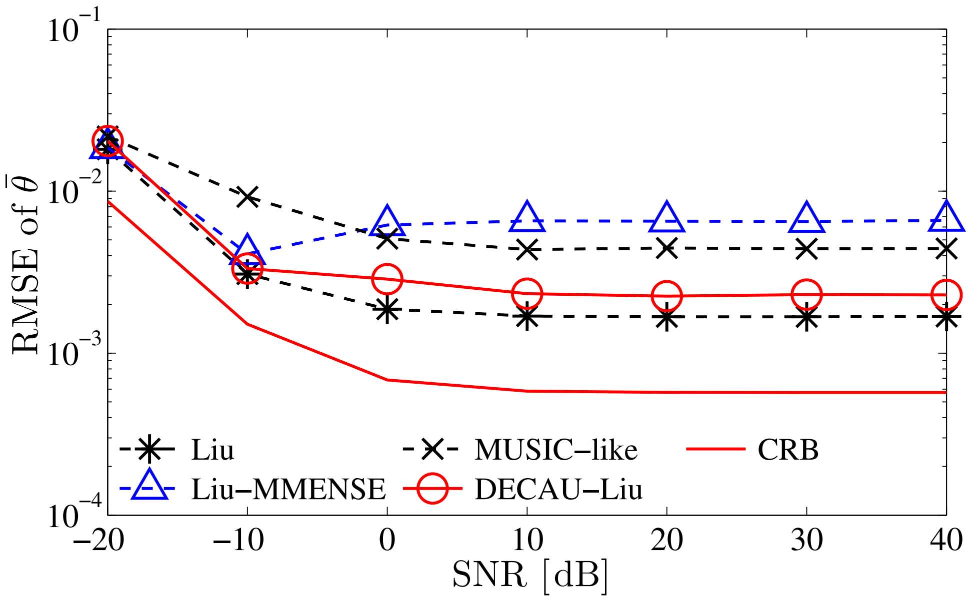
図5.6(b)より，スナップショット数$K=1,000$の場合，図5.6(a)と同じ傾向となり，DECAU-Liu法は到来波数が未知でもその推定精度は，Liu手法の次となる．

次に，SNRの値がそれぞれ0 dBと30 dBの場合において，Kを100から$1,000$の300刻みで変化させ，各手法の$\bar{\theta}$のスナップショット数Kに対するRMSEを比較した結果を表す．

$\mathbb{U}$を適用した場合の結果を図5.7に表し，$\mathbb{V}$を適用した場合の結果を図5.8に表す．図5.7の結果は図5.5の結果と対応しており，DECAU-Pal法は，到来波数が未知でもその推定精度がPal-Tpl法の推定精度に近いことが分かる．同様に，図5.8の結果は図5.6の結果と対応しており，DECAU-Liu法は，到来波数が未知でもその推定精度がLiu手法の推定精度に近いことが分かる．

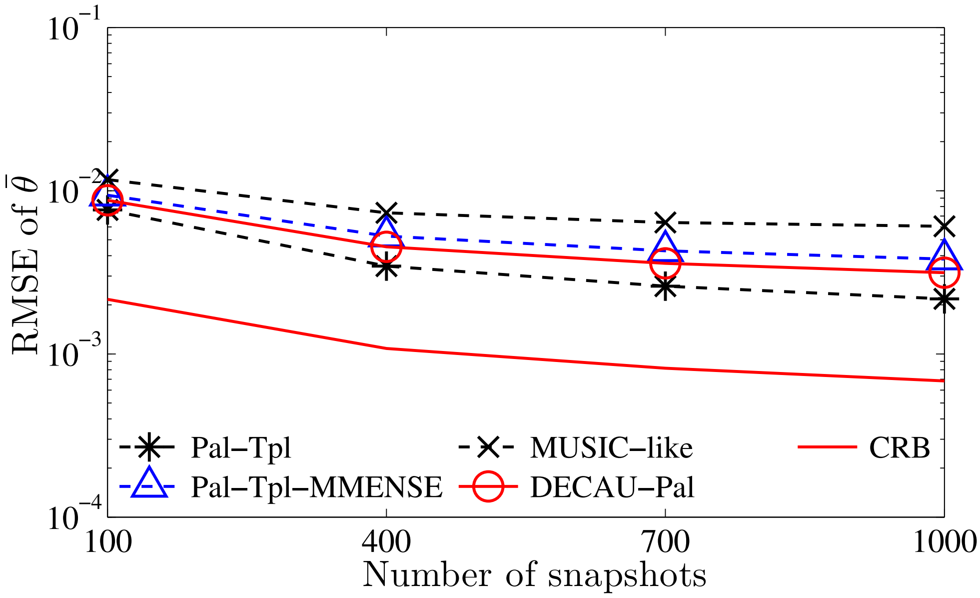


(a) スナップショット数 $K = 400$ の場合

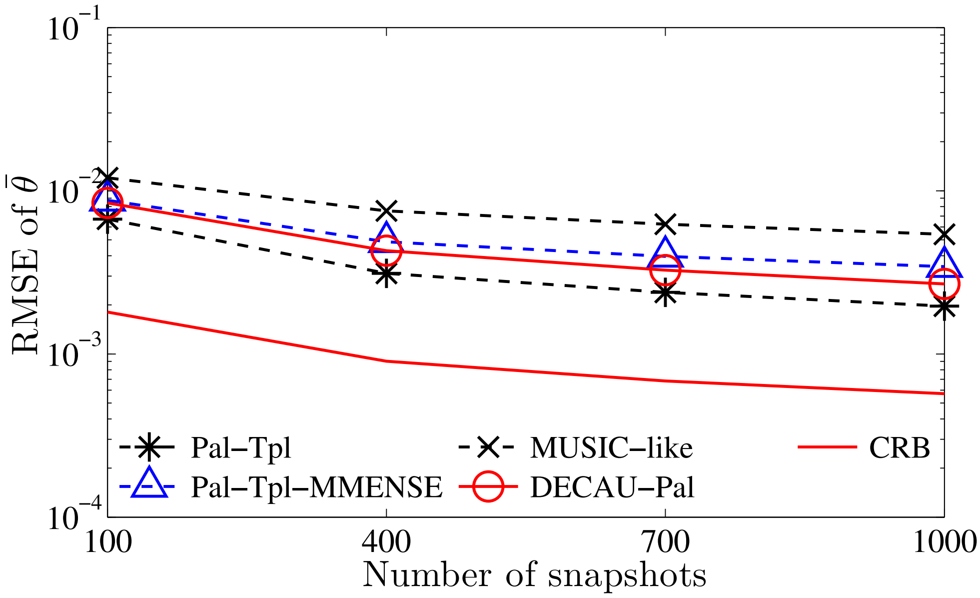


(b) スナップショット数 $K = 1,000$ の場合

図 5.6: $\mathbb{V}$ を適用した提案法の $\bar{\theta}$ の SNR に対する推定精度

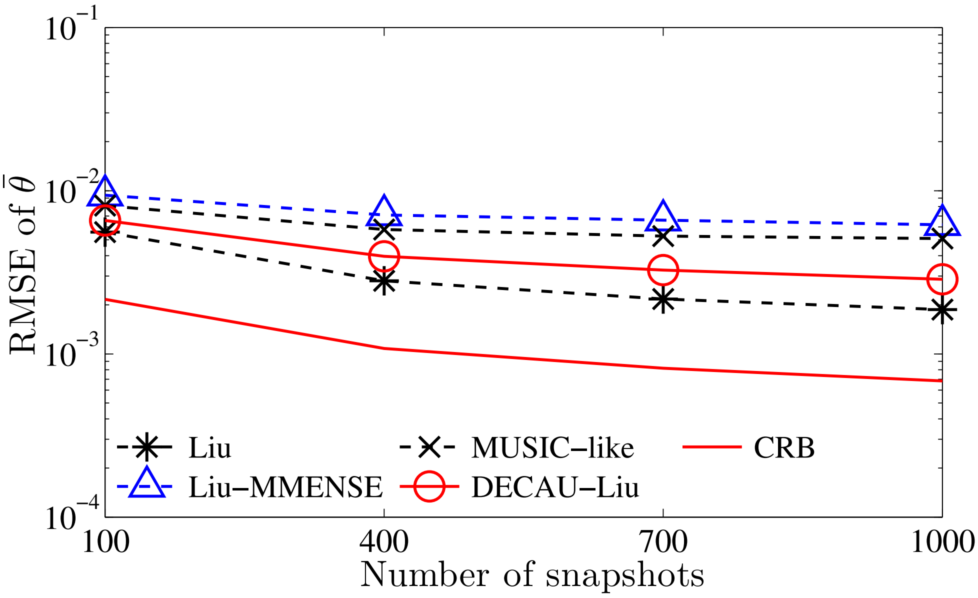


(a) SNR= 0 dB の場合

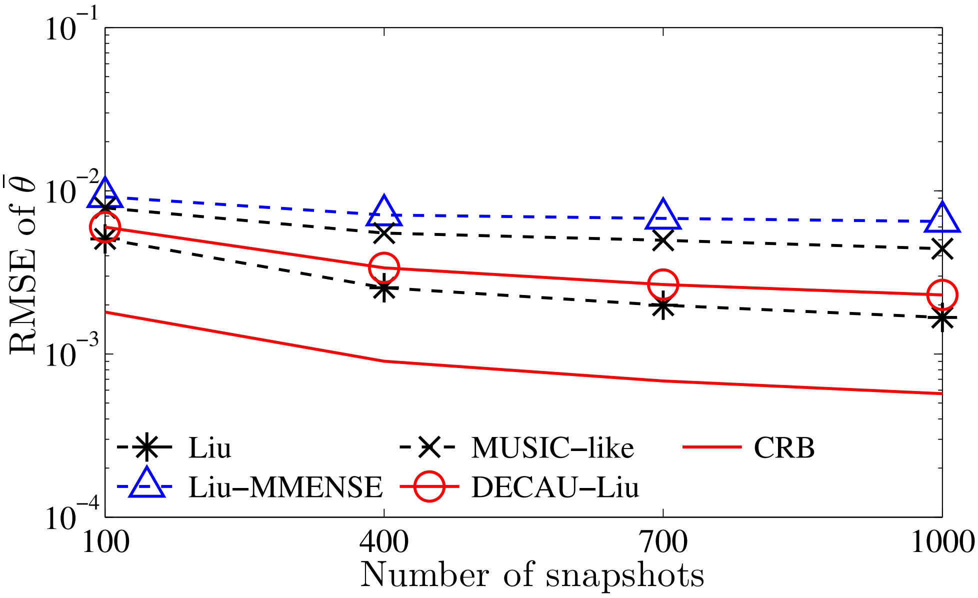


(b) SNR= 30 dB の場合

図 5.7: $\mathbb{U}$ を適用した提案法の $\bar{\theta}$ の K に対する推定精度



(a) SNR= 0 dB の場合



(b) SNR= 30 dB の場合

図 5.8: $\mathbb{V}$ を適用した提案法の $\bar{\theta}$ の K に対する推定精度

5.4.4 計算コストの比較

ここでは，提案法と Pal-Tpl 法，Liu 手法の計算コストを比較するため，まずはそれぞれの手法の理論的演算回数を比較する．その後，**4.3.1** と同じシミュレーション環境下で，複数回実行させた際の推定時間の平均値を一回の推定時間とし，両者の一回の推定時間の測定値の比較を行う．

5.4.4.1 演算回数の比較

ここでは，提案法の DECAU-Pal 法と DECAU-Liu 法，Pal-Tpl 法と Liu 手法に対し，到来方向推定処理で利用する演算回数について評価する．ただし，Pal-Tpl 法，Liu 手法では，到来方向推定を行なう際に MUSIC 法を適用する．また，演算回数は，複素数の演算等で利用する実数の乗算と加算の回数とする．

演算回数は主に行列 $\boldsymbol{R}_y$ の計算，次に $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ または $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{D}}$ の計算，次にテプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_T$ または核型ノルム最小化による $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ の計算，次に，雑音電力の推定，そして，$\boldsymbol{F}_{\mathbb{U}}^{\dagger}$ または $\boldsymbol{F}_{\mathbb{V}}^{\dagger}$，最後に $\boldsymbol{R}_T$ または $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ に対する $\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ 及び $\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\theta)$ または $\mathcal{P}_{\mathbb{V}}(\theta)$ の計算の 5 つの部分からなる．

まず，**4.3.3.1** と同様に，相関行列 $\boldsymbol{R}_y$ を求めるのに，演算回数 $\mathcal{O}\big(8KL^2\big)$ が必要となり，ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{U}}$ または $\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathbb{D}}$ を求めるには，演算回数 $\mathcal{O}\big(2L^2\big)$ となる．また，テプリッツ行列 $\boldsymbol{R}_T$ を求めるには，既存の数値の代入処理のみを行えばよく，演算は必要ない．

次に，核型ノルム最小化による $\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ の演算回数を求める．核型ノルムの計算は，主に特異値分解となり，演算回数が行列の列数の 3 乗に比例する [38]．式 (5.1) では，凸問題を解くが，解が求まるまでの各ループ内で核型ノルムを求めるため，ループ 1 つの演算回数は $\mathcal{O}\big(S_{\mathbb{V}}^3\big)$ となる．凸問題を解くためのループの繰り返し回数は $\boldsymbol{R}_{\mathbb{V}}$ の要素数に比例するため [45]，ループの回数は $\mathcal{O}\big(S_{\mathbb{V}}^2\big)$ となるので，核型ノルム最小化に必要な演算回数は $\mathcal{O}\big(S_{\mathbb{V}}^5\big)$ となる．

次に，雑音電力を推定するため，$\boldsymbol{R}_T$ の最小の固有値を求めるので，演算回数は $\mathcal{O}\big((2S_{\mathbb{U}}+1)^3\big)$ となる

次に，$\boldsymbol{F}_{\mathbb{U}}^{\dagger}$ を求めるために必要な演算回数を求める．**3.3.3.1** の結果を用いて，演算回数は $\mathcal{O}\big((S_{\mathbb{U}}+1)^2(11S_{\mathbb{U}}+7)\big)$ となる．同様に，$\boldsymbol{F}_{\mathbb{V}}^{\dagger}$ を求めるため，演算回数は $\mathcal{O}\big((S_{\mathbb{V}}+1)^2(11S_{\mathbb{V}}+7)\big)$ が必要となる．

最後に，角度 θ に対して -90° から 90° までの T_θ(正の整数) 回をスキャンする．このとき，正方行列の逆行列における演算回数は列数の 3 乗に比例すること [38] に注意すると，$\boldsymbol{R}_T$ の固有値分解において，演算回数 $\mathcal{O}\big((S_{\mathbb{U}}+1)^3\big)$ となる．また，$\boldsymbol{R}_T$ に対する $\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ を求めるため，演算回数は $\mathcal{O}\big(16T_\theta S_{\mathbb{U}}(S_{\mathbb{U}}-P+1)\big)$ となる．同様に，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ の固有値分解において，演算回数 $\mathcal{O}\big((S_{\mathbb{V}}+1)^3\big)$ となり，$\boldsymbol{R}_{\mathbb{L}}^{\star}$ に対する $\mathcal{P}_{MU}(\theta)$ を求めるため，演算回数は $\mathcal{O}\big(16T_\theta S_{\mathbb{V}}(S_{\mathbb{V}}-P+1)\big)$ となる．

一方，$\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\theta)$ の演算回数を求める．**3.3.3.1** と同様に，正方行列の逆行列における演算回数は列数の 3 乗に比例すること [38] と，正方行列の固有値における計算回数が行列の列数の 3 乗に比例すること [39] に注意すると，$\mathcal{P}_{\mathbb{U}}(\theta)$ を求めるための演算回数は $\mathcal{O}\big(25T_\theta S_{\mathbb{U}}^3\big)$ となる．同様に，$\mathcal{P}_{\mathbb{V}}(\theta)$ を求めるための演算回数は $\mathcal{O}\big(25T_\theta S_{\mathbb{V}}^3\big)$ となる．

上の結果により，各手法の演算回数は表 5.3 のようにまとめられる．

表 5.3: 提案法と従来法の演算回数の比較

到来方向推定手法		主にかかる演算回数
Liu 法		$\mathcal{O}\big((8K+2)L^2+(S_{\mathbb{V}}+1)^3+16T_\theta S_{\mathbb{V}}(S_{\mathbb{V}}-P+1)+S_{\mathbb{V}}^5\big)$
提案法	Pal-Tpl 法	$\mathcal{O}\big((8K+2)L^2+(S_{\mathbb{U}}+1)^3+16T_\theta S_{\mathbb{U}}(S_{\mathbb{U}}-P+1)\big)$
	DECAU-Pal 法	$\mathcal{O}\big((8K+2)L^2+(2S_{\mathbb{U}}+1)^3+(11+25T_\theta)S_{\mathbb{U}}^3\big)$
	DECAU-Liu 法	$\mathcal{O}\big((8K+2)L^2+(2S_{\mathbb{U}}+1)^3+(11+25T_\theta)S_{\mathbb{V}}^3+S_{\mathbb{V}}^5\big)$

表 5.3 の結果により，Liu 法及び DECAU-Liu 法では，核型ノルム最小化による補間を行うため，この処理において演算回数は $\mathcal{O}\big(S_{\mathbb{V}}^5\big)$ が必要となってしまい，計算コストに大きい影響を及ぼすことが予測される．また，$S_{\mathbb{V}} > S_{\mathbb{U}}$ であるため，Pal-Tpl 法の演算回数が最も少なく，DECAU-Liu 法の演算回数が最も多いことが予測される．

5.4.4.2　推定時間の比較

ここでは，**4.3.1** で示したシミュレーション環境下において，到来波数 $P = 13$，スナップショット数 $K = 100$，SNR=20 dB，スキャンの角度刻み 1° で，$2,000$ 回推定した際の推定時間を平均化した一回あたりの推定時間に関して，提案法の DECAU-Pal 法，DECAU-Liu 法と Pal-Tpl 法，Liu 手法とを比較する．

表 5.4 により，Pal-Tpl 法の推定時間が最も短く，その次に DECAU-Pal 法，そして Liu 手法，最後に DECAU-Liu 法の推定時間が最も長いことが分かる．Liu 手法と DECAU-Liu 法の両手法の推定時間が長い理由としては，核型ノルムの最小化の処理が時間かかるということが分かる．

表 5.4: 提案法と従来法の推定時間の比較

到来方向推定手法		アレー素子数 $2M+N-1$	
		$10\,(M=3, N=5)$	$12\,(M=4, N=5)$
Liu 手法		$1,976\,\mathrm{ms}$	$5,988\,\mathrm{ms}$
提案法	Pal-Tpl 法	$5\,\mathrm{ms}$	$6\,\mathrm{ms}$
	DECAU-Pal 法	$53\,\mathrm{ms}$	$82\,\mathrm{ms}$
	DECAU-Liu 法	$2,032\,\mathrm{ms}$	$6,235\,\mathrm{ms}$

第6章　結論

6.1　まとめ

本研究では，アレーアンテナによる到来方向推定法において主となる2つの課題を解決する方法を提案した．

まず，未知の到来波数に対する到来波の方向推定という第1の課題に対して，相関波が存在し，また到来波数情報が未知の場合において有効な到来方向推定であるQian手法を対象にして改良法を提案した．Qian手法では，アレーの対称性を利用して，相関行列の2つの行に関する複素共役対称性を用いているが，その性質が成り立たないことがあり，推定精度が低下する問題がある．また，相関行列の行成分から求めたテプリッツ行列に存在する雑音を含む成分を無視したため，推定精度が低下する問題がある．これらの問題に対して，提案法では，最初に相関行列の平均化処理を行なうことにより，相関行列の2つの行を複素共役対称にしてから，雑音電力を推定して雑音成分をそれぞれのテプリッツ行列から削除する．これらの改良によって，到来方向の推定速度の低下があまりなく，より高精度な方向推定法を提案することができた．

次に，アレー素子数以上の到来波に対する到来方向推定という第2の課題に対しては，アレー素子数以上の到来波に対しても推定できるPal手法を対象とした．Pal手法では，サンプルデータの一部のみ利用するため推定精度が低下する問題と，空間平均処理を適用しているため推定速度が低下する問題に対して，提案法では，重複する仮想素子の相関値の平均を求めることにより，サンプルデータを捨てることなく，推定精度を向上できた．また，相関行列を求める際に空間平均処理を適用せず，テプリッツ行列である相関行列を求めることにより，計算コス

トの低減ができた．この2つの改良を適用することによって，提案法はPal手法と比べて，推定精度及び推定速度が向上できた．

そして，それぞれの課題に対する研究成果を活かして，さらに改良を加えたことで，コプライムアレーを用いて未知の到来波数におけるアレー素子数以上の到来波に対し，高精度な到来方向推定法を提案した．提案法は，コプライムアレーから中心対称である仮想ULAに拡張した後に，これらのアレーの相関行列を求めて，相関行列の各行成分を用いてQian手法と同様にテプリッツ行列を作成する．この際に，雑音を含む成分が未知であるため推定する必要があるが，Qian手法の改良法と異なり，この雑音を含む成分は複雑である．提案法では，その雑音を含む成分を推定する方法を提案し，拡張された仮想ULAにQian手法の改良法を適用した．提案法は，到来波数が既知とした場合の4章の提案法またはLiu手法とほぼ同程度の推定精度であり，対応できる到来波数もほぼ同じであるという多くの利点がある．

6.2 今後の課題

提案法でのDECAU-Liu法では，核型ノルム最小化による補間を行うため，計算コストという問題は避けられない．このため，提案法の計算コストを減少することが，今後の課題である．

謝辞

本研究に際して，毎日厳しく優しいご指導を頂きました松原 隆先生に深謝いたします．先生のお陰で，基礎知識から信号処理の専門の知識まで様々なことを学べさせていただきました．また多くのご指導やアドバイスを下さいました黒川恭一先生，渡邉宏太郎先生，道下尚文先生，岩井啓輔先生，新潟大学の山田寛喜先生に深く感謝いたします．

参考文献

[1] D. Viccione, "An optical technique for simultaneous beamforming and cross-correlation," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol.AES-2-4, pp.376-384, Jul. 1966.

[2] J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," Proceedings of the IEEE, vol.57, no.8, pp.1408-1418, Aug. 1969.

[3] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," Proceedings of the RADC Spectrum Estimation Workshop, pp.243-258, New York, USA, Oct. 1979.

[4] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.34, no.3, pp.276-280, Mar. 1986.

[5] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.37, no.7, pp.984-995, Jul. 1989.

[6] B. Ottersten, M. Viberg, and T. Kailath, "Performance analysis of the total least squares ESPRIT algorithm," IEEE Transactions on Signal Processing, vol.SP-39, no.5, pp.1122-1135, May 1991.

[7] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," IEEE Transactions on Automatic Control, vol.19, no.6, pp.716-723, Dec. 1974.

[8] M. Wax and T. Kailath, “Detection of signals by information theoretic criteria,” IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.33, no.2, pp.387-392, Apr. 1985.

[9] J. Xin and A. Sano, “Simple and efficient nonparametric method for estimating the number of signals without eigendecomposition,” IEEE Transactions on Signal Processing, vol.55, no.4, pp.1405-1420, Apr. 2007.

[10] 新村剛士, 杉本和人, 菊間信良, 平山　裕, 榊原久二男，“QR 分解を用いた MENSE 法に基づく到来波数推定法の改善，” 電子情報通信学会論文誌 B, vol.J95-B, no.9, pp.1185-1187, Sep. 2012.

[11] M. Tsuji, K. Umebayashi, Y. Kamiya and Y. Suzuki, “A study on the accurate estimation of the number of weak coherent signals,” Proceedings of the 6th European Radar Conference, pp.234-237, Rome, Italy, Oct. 2009.

[12] 松原　隆，長濱雄起，久保正男，黒川恭一，“低 SN 比条件下における QR 分解を用いた高性能な到来波数推定法，” 電子情報通信学会論文誌 B，vol.J95-B, no.9, pp.1131-1140, Sep. 2012.

[13] T.B. Lavate, V.K. Kokate, and A.M. Sapkal, “Performance Analysis of MUSIC and ESPRIT DOA Estimation Algorithms for Adaptive Array Smart Antenna in Mobile Communication,” Proceedings of the 2010 Second International Conference on Computer and Network Technology, pp.308-311, Bangkok, Thailand, Apr. 2010.

[14] T. Shan, M. Wax, and T. Kailath, “On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals,” IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.33, no.4, pp.806-811, Aug. 1985.

[15] S. Pillai and B. Kwon, “Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification,” IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.37, no.1, pp.8-15, Jan. 1989.

[16] M.I. Miller and D.R. Fuhrmann, “Maximum-likelihood narrow-band direction finding and EM algorithm,” IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.38, no.9, pp.1560-1577, Sep. 1990.

[17] J.A. Fessler and A.O. Hero, “Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm,” IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.42, no.10, pp.2664-2677, Oct. 1994.

[18] 石黒靖博，菊間信良，平山　裕，榊原久二男，“SAGE アルゴリズムを用いた高分解能電波到来方向推定のための方形重み付きアレーアンテナ校正法，” 電子情報通信学会論文誌 B，vol.J93-B, no.2, pp.303-311, Feb. 2010.

[19] 齋藤健太郎，今井哲朗，北尾光司郎，岡野由樹，“EM/SAGE 法と拡張 MODE 法の組合せによるハイブリッド型伝搬パラメータ推定手法，” 電子情報通信学会論文誌 B，vol.J94-B, no.9, pp.1065-1075, Sep. 2011.

[20] F. Han and X. Zhang, “An ESPRIT-like algorithm for coherent DOA estimation,” IEEE Antennas Wireless Propagation Letters, vol.4, pp.443-446, Dec. 2005.

[21] Y. Zhang and B. Ng, “MUSIC-Like DOA estimation without estimating the number of sources,” IEEE Transactions on Signal Processing, vol.58, no.3, pp.1668-1676, Mar. 2010.

[22] C. Qian, L. Huang, W. Zeng, and H. So, “Direction-of-arrival estimation for coherent signals without knowledge of source number,” IEEE Sensors Journal, vol.14, no.9, pp.3267-3273, Sep. 2014.

[23] J. H. Choi and C. D. Yoo, "Underdetermined high-resolution DOA estimation: a 2ρth-order source-signal/noise subspace constrained optimization," IEEE Transactions on Signal Processing, vol.63, no.7, pp.1858-1873, Apr. 2015.

[24] S. Pillai, Array Signal Processing, Springer, 1989.

[25] R. T. Hoctor and S. A. Kassam, "The unifying role of the co-array in aperture synthesis for coherent and incoherent imaging," Proceedings of the IEEE, vol.78, no.4, pp.735-752, Apr. 1990.

[26] A. Moffet, "Minimum-redundancy linear arrays," IEEE Transactions Antennas and Propagation, vol.16, no.2, pp.172-175, Mar. 1968.

[27] G. S. Bloom and S. W. Golomb, "Application of numbered undirected graphs," Proceedings of the IEEE, vol.65, no.4, pp. 562-570, Apr. 1977.

[28] S. Qin, Y. Zhang, and M. Amin, "Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation," IEEE Transactions on Signal Processing, vol.63, no.6, pp.1377-1390, Mar. 2015.

[29] P. Pal and P. P. Vaidyanathan, "Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom," IEEE Transactions on Signal Processing, vol.58, no.8, pp.4167-4181, Aug. 2010.

[30] P. Pal and P. Vaidyanathan, "Coprime sampling and the MUSIC algorithm," Proceedings of the Digital Signal Processing Workshop and IEEE Signal Processing Education Workshop, pp.289-294, Arizona, USA, Jan. 2011.

[31] C. Liu, P. Vaidyanathan, and P. Pal, "Coprime coarray interpolation for DOA estimation via nuclear norm minimization," Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems, pp.2639-2642, Montreal, Canada, May 2016.

[32] 菊間信良，アレーアンテナによる適応信号処理，科学技術出版，東京，1998.

[33] R. Lyons, Understanding digital signal processing, Second edition, Prentice hall professional technical reference, New Jersey, Mar. 2004.

[34] R. Evans and I. Isaacs, "Generalized Vandermonde determinants and roots of unity of prime order," Proceedings of the American Mathematical Society, vol.58, no.1, pp. 51-54, Jul. 1976.

[35] グエン　アン　トゥワン，園山浩司，松原　隆，黒川恭一，"テプリッツ行列を用いた未知の到来波数における DOA 推定法，" 電子情報通信学会論文誌 B，vol.J99-B, no.8, pp.581-590, Aug. 2016.

[36] R. Horn, C. Johnson, Matrix analysis, Second edition, Cambridge university press, New York, 2013.

[37] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likehood, and Cramer-Rao bound," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.37, no.5, pp.720-741, May 1989.

[38] G. Golub, C. Van Loan, Matrix computations, The Johns Hopkins university press, London, 1996.

[39] V. Pan and Z. Chen, "The complexity of the matrix eigenproblem," Proceedings of the 31st annual ACM Symposium on Theory of computing, pp.507-516, Georgia, USA, May 1999.

[40] C. Liu and P. Vaidyanathan, "Cramér-Rao bounds for coprime and other sparse arrays, which find more sources than sensors," Digital Signal Processing, vol.61, pp.43-61, Feb. 2017.

[41] T. Nguyen, T. Matsubara, and T. Kurokawa, "Low-complexity and high-accuracy DOA estimation for coprime arrays using Toeplitz matrices," Pro-

ceedings of the IEEE International Conference on Computational Electromagnetics, pp.176-178, Kumamoto, Japan, Mar. 2017.

[42] T. Nguyen, T. Matsubara, and T. Kurokawa, "DOA estimation method for co-arrays with unknown number of sources," Proceedings of the IEEE International Conference on Signals and Systems, pp.308-311, Sanur, Indonesia, May 2017.

[43] T. Nguyen, T. Matsubara, and T. Kurokawa, "High-performance DOA estimation for coprime arrays with unknown number of sources," Proceedings of the IEEE Asia-Pacific International Symposium on Electromagnetic Compatibility, pp.369-371, Seoul, South Korea, Jun. 2017.

[44] グエン　アン　トゥワン，松原　隆，黒川恭一，"未知の到来波数に対するコプライムアレーを用いた到来方向推定法，" 電子情報通信学会論文誌 B（条件付採録）.

[45] S. Bubeck, "Convex optimization: algorithms and complexity," Foundations and Trends® in Machine Learning, vol.8, no.3-4, pp.231-358, Nov. 2015.

研究業績

学術論文

1. グェン　アン　トゥワン，園山　浩司，松原　隆，黒川恭一，“テプリッツ行列を用いた未知の到来波数における到来方向推定法，” 電子情報通信学会論文誌 B，vol.J99-B, no.8, pp.581-590, Aug. 2016.

2. グェン　アン　トゥワン，松原　隆，黒川恭一，“未知の到来波数に対するコプライムアレーを用いた到来方向推定法，” 電子情報通信学会論文誌 B（条件付き採録）.

国際会議（査読あり）

1. Anh-Tuan Nguyen, Takashi Matsubara, Takakazu Kurokawa, “Low-complexity and high-accuracy DOA estimation for coprime arrays using Toeplitz matrices,” Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Electromagnetics, pp.176-178, Kumamoto, Japan, Mar. 2017.

2. Anh-Tuan Nguyen, Takashi Matsubara, Takakazu Kurokawa, “DOA estimation method for co-arrays with unknown number of sources,” Proceedings of the IEEE International Conference on Signals and Systems, pp.308-311, Sanur, Indonesia, May 2017.

3. Anh-Tuan Nguyen, Takashi Matsubara, Takakazu Kurokawa, “High-performance DOA estimation for coprime arrays with unknown number of sources,” Proceeding of the IEEE Asia-Pacific International Symposium on Electromagnetic Compatibility, pp.369-371, Seoul, South Korea, Jun. 2017.

学会発表

1. グエン　アン　トゥワン，松原　隆，園山浩司，黒川恭一，“未知の到来波数におけるテプリッツ行列を用いた到来方向推定法，” 電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集，B-1-141，2015 年 8 月.

2. グエン　アン　トゥワン，園山浩司，松原　隆，黒川恭一，“テプリッツ行列を利用した未知の到来波数に対する到来方向推定法，” 電子情報通信学会技術研究報告，vol.115, no.355, AP2015-154, pp.1-6, 2015 年 12 月.

3. 園山浩司，松原　隆，グエン　アン　トゥワン，黒川恭一，“雑音部分空間の直交補空間を用いた RV-MUSIC 法の改良，” 電子情報通信学会総合大会講演論文集，B-1-196, 2016 年 3 月.

4. グエン　アン　トゥワン，松原　隆，黒川恭一，“コプライムアレーにおけるテプリッツ行列を用いた高性能な DOA 推定法，” 電子情報通信学会技術研究報告，vol.116, no.142, AP2016-39, pp.13-18, 2016 年 7 月.

5. グエン　アン　トゥワン，松原　隆，黒川恭一，“Coprime Array と Nested Array を用いた高性能な到来方向推定法，” 電子情報通信学会技術研究報告，vol.116, no.345, AP2016-126, pp.17-22, 2016 年 12 月.

6. グエン　アン　トゥワン，松原　隆，黒川恭一，“コプライムアレーを用いた未知の到来波数に対する到来方向推定法，” 電子情報通信学会総合大会講演論文集，B-1-120, 2017 年 3 月.

7. グエン　アン　トゥワン，松原　隆，黒川恭一，“コプライムアレーを利用した未知の到来波数に対する到来方向推定法，” 電子情報通信学会技術研究報告，vol.117, no.181, AP2017-69, pp.7-12, 2017 年 8 月.

財団助成金受領

1. 公益財団法人 NEC C&C 財団，国際会議論文発表助成金受領，2017 年 4 月．

2. 公益財団法人電気通信普及財団，海外渡航費援助金受領，2017 年 4 月．