

修理遅延時間を考慮した保全方策に関する研究

防衛大学校理工学研究科後期課程

電子情報工学系専攻 エレクトロニクス工学教育研究分野

北川 智大

平成29年12月

目 次

第 1 章 序 論	1
1.1 保全と保全方策	1
1.2 ダウンタイムと修理遅延時間	6
1.3 現状の問題点と研究の目的	9
1.4 論文の内容	13
第 2 章 基礎概念	15
2.1 用 語	15
2.2 信頼性解析の基礎	18
2.2.1 信頼度関数と故障率関数	18
2.2.2 指数分布とワイブル分布	21
2.2.3 直列・並列システムの信頼度	23
2.3 確率過程	25
2.3.1 定常ポアソン過程	25
2.3.2 非定常ポアソン過程	29
2.3.3 再生過程	30
2.3.4 交代再生過程	34
2.3.5 再生報酬過程	35
2.4 最適化手法	38
2.4.1 傾斜法	38
2.4.2 黄金分割法	39
2.4.3 アニーリング法	41
2.5 モンテカルロ法	43
2.5.1 逆関数法	43
2.5.2 モンテカルロ・シミュレーション	44
第 3 章 フォールト検出時間を伴うシステムへの小修理の適用	45

3.1	はじめに	45
3.2	シングルユニットモデル	48
3.2.1	記号	48
3.2.2	仮定	49
3.2.3	目的関数の導出	50
3.2.4	目的関数の挙動	55
3.2.5	アルゴリズム	57
3.2.6	数値例	58
3.2.7	まとめ	60
3.3	2ユニットモデル	61
3.3.1	記号	61
3.3.2	仮定	62
3.3.3	同時取替方策	64
3.3.4	独立取替方策	69
3.3.5	数値例	71
3.3.6	まとめ	76
3.4	マルチユニットモデル	78
3.4.1	記号	78
3.4.2	仮定	79
3.4.3	解析	80
3.4.4	数値例	84
3.4.5	まとめ	91
3.5	非定期点検モデル	93
3.5.1	記号	93
3.5.2	仮定	93
3.5.3	目的関数の導出	94
3.5.4	アルゴリズム	95
3.5.5	数値例	96
3.5.6	まとめ	98
3.6	取替時期管理方法に関する考察	100
3.6.1	記号	100

3.6.2	仮 定	100
3.6.3	数値実験	101
3.6.4	まとめ	103
3.7	おわりに	105
第 4 章	一定の確率で補給遅延時間が発生するシステムの保全 方策	107
4.1	はじめに	107
4.2	用語と記号	110
4.3	CFR モデル	112
4.3.1	仮 定	112
4.3.2	目的関数の導出	113
4.3.3	最適 ORP の性質	115
4.3.4	数値例	117
4.3.5	まとめ	119
4.4	IFR モデル	120
4.4.1	作業回数管理方策	120
4.4.2	作業時間管理方策	126
4.4.3	数値例	129
4.4.4	2 方策の比較と考察	132
4.4.5	まとめ	133
4.5	おわりに	135
第 5 章	管理遅延時間を伴うシステムの最適修理方法の選 択	136
5.1	はじめに	136
5.2	記 号	140
5.3	作業時間がランダムの場合	141
5.3.1	仮 定	141
5.3.2	目的関数の導出	143
5.3.3	目的関数の挙動	145

5.3.4	独立帰投時間モデル	150
5.3.5	数値例	153
5.3.6	まとめ	162
5.4	作業が定時間の場合	163
5.4.1	仮定	163
5.4.2	目的関数の導出	163
5.4.3	目的関数の挙動	165
5.4.4	独立帰投時間モデル	166
5.4.5	数値例	168
5.4.6	まとめ	171
5.5	おわりに	172
第 6 章	結 論	174
6.1	研究成果の概要	174
6.2	提案モデルとその拡張性	176
6.3	今後の課題	178
付録 A	平均アベイラビリティの単峰性	180
A.1	平均取替間隔	180
A.2	平均取替間隔の微分値の数値計算	182
A.3	現実的なパラメータ	187
付録 B	平均コストレートの挙動	189
付録 C	リスク	190
付録 D	$n \geq 2$ の場合の計算困難さ	191
D.1	記号	191
D.2	$n=2$ かつ $m=2$ の場合	191
付録 E	近似式	195
E.1	信頼度関数の近似	195
E.2	小修理コストの近似	198
付録 F	極限值での解析	200
F.1	$\beta \rightarrow 1$ のとき	200

F.2	$\beta \rightarrow \infty$ のとき	201
付録 G	式 (4.5) の証明	203
付録 H	b_∞ の発散	205
付録 I	平均コストレートの挙動	207
I.1	挙動分析	207
I.2	$\xi(T)$ の挙動	211
I.3	$\gamma_L(T)$ の挙動	212
I.4	$S(\infty)$ の発散	212
付録 J	平均コストの挙動の分類	216
J.1	挙動分析	216
J.2	$K > 1$ の証明	218
付録 K	平均アベイラビリティの挙動の分類	220
付録 L	式 (5.30) を満たす r_2 の存在条件	225
付録 M	条件 (ハ) を満たす r_2 の非存在条件	227
付録 N	平均アベイラビリティの単峰性の証明	229
謝 辞		232
参考文献		234
研究業績		243

第 1 章 序 論

1.1 保全と保全方策

システムの信頼性を定量的かつ客観的な方法によって高く保とうとする取り組みは，第二次世界大戦後の米国で軍用の電子機器を対象として始められ，わが国においても 1960 年代中頃から導入され始めた[1]．その後，産業技術の発展とともに信頼性の概念はより拡大され，現在では信頼性性能のほかにも保全性性能及び保全支援能力を記述する包括的な用語としてディペンダビリティという単語が用いられる．また，対象となるシステムについても，電気，通信，機械，土木，医療産業，あるいはソフトウェアなど，非常に多くの分野に拡大されている．

1965 年には Barlow and Proschan が文献[2]で数学的な手法を用いた信頼性の評価手法を体系化した．これは以後多くの信頼性解析の礎となっているが，保全方策の分野も例外ではない．ここで，保全とは「アイテムを使用及び運用可能状態に維持し，又は故障，欠点などを回復するためのすべての処置及び活動」をいい，どのような場合にどのような保全を行うかを定めたルールを保全方策という．保全方策研究での目標は，対象となるシステムの保全をモデル化するとともに，稼働率や運用費用等の目的関数を最適化することにある．具体的には，システムの平均アベイラビリティを最大にする，あるいは単位時間当たりの期待費用を最小にするといった保全計画を立案することである．また，近年では保全費用だけでなく，取得・運用費用を含めたライフサイクルコストの最小化へも関心が向けられている[3]．

保全の管理上の分類を図 1.1 に示す[4]．

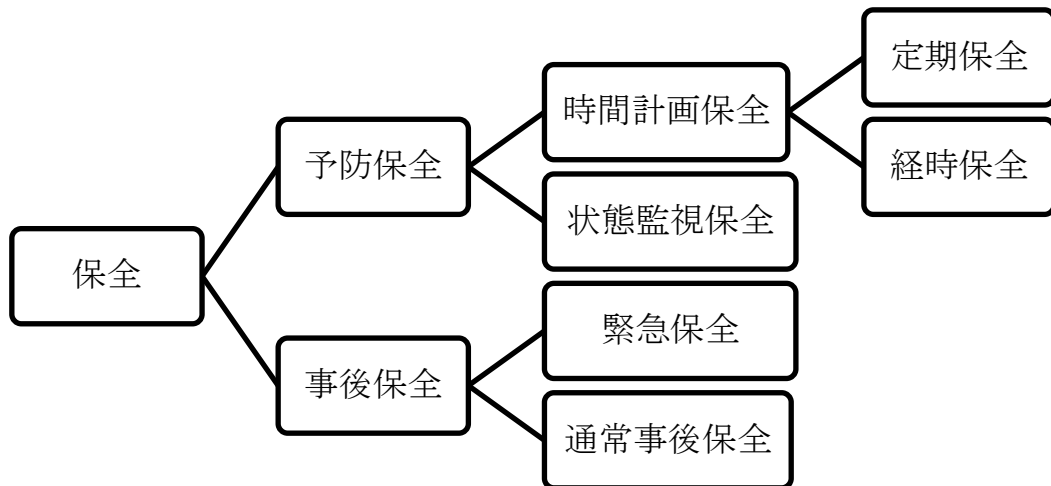


図 1.1 JIS Z 8115:2000[4]による保全の管理上の分類

まず，保全は予防保全と事後保全に大別される．予防保全とは，故障などが発生する前にあらかじめ計画的に行われる保全である．事後保全は故障などの発生後に行われる取替えや修理などの保全であり，システムを要求機能遂行状態に修復するために行われる．

状態監視保全とは，システムの動作状態や劣化傾向などの継続的な監視に基づき行われる保全である．システムの潜在的な故障を発見するための点検も状態監視保全に分類される．一方，時間計画保全とは，定められた時間計画に従って遂行される保全である．時間計画保全は，定期的に保全を行う定期保全と，使用時間が予め定められた値に達したときに保全を行う経時保全に分類できる．

最も単純な保全方策は，「故障したときに修理する」方策であり，システムの故障の起こりやすさを表す故障率が一定の場合には，この方策が最適であることが知られている[5]．故障率が一定でない場合には，予防保全をいつ行えば良いかや，保全によって故障率がどの程度減少するかも考慮する必要がある．以下に，保全の代表例ともいえる点検，修理及び取替えに関するこれまでの保全方策研究を概観する．

(A) 点 検

点検とは、本論文ではシステムの潜在的な故障の有無を確認するために行う保全をいい、図 1.1 では状態監視保全に分類される[4].

点検をどのような時期・機会に行うかを決定する方策は、定期点検、逐次点検及びランダム点検に大別される．定期点検方策は定期的に点検を行う方法であり、点検に関する業務の管理が容易であるという特徴がある．Ito and Nakagawa[6]-[10] は、2 個ないし 3 個のユニットからなるシステムにおいて、ある定められた信頼度を下回ることなく運用するための定期点検間隔を決定した．一方、逐次点検では、点検の間隔を一定にする必要はなく、システムの故障率の変化に合わせて点検時期を決定することができる．定期点検は逐次点検の特別な場合と捉えることもできる．逐次点検方策では、時間とともに点検間隔を短くすることにより、故障率が時間とともに増加するシステムの故障の発見を効率的に行うことが期待できる．Beichelt [11]は、単一ユニットのシステムにおける逐次点検のタイミングを最適化する研究を行っている．ランダム点検は、点検の実施時刻が確率変数で表される点検をいう．Nakagawa らは、システムの作業終了時等の機会に点検を行う方策を提案し、定期点検との比較を行った[12][13]．また、単位時間当たりの点検回数として点検強度を定義し、最適な点検スケジュールを近似的に求める研究[14]-[16]も行われている．

システムの故障が点検で確実に検知できることが前提となっているモデルも多いが、点検でも故障が看過される可能性を考慮した不完全点検モデルも考案されている[17][18]．また、点検することでシステム自体に故障等のリスクの増大を招く可能性があるが、このような現象は Chou and Butler[19]によってモデル化されている．また、保全の質や費用などが時間とともに変化するケースも存在する．例えば、点検費用が時間とともに増大するモデル[20]が考案されている．

(B) 修 理

修理の基本的な作用は故障の復旧であるが、修理後にシステムの故障率が改善する場合がある。故障率が運用開始時点まで回復する修理を完全修理というのに対し、故障率が修理の前後で変化しない修理を小修理という。例えば、システムを構成するアイテムが多数存在し、その一部のみの取替えにより故障が復旧する場合、システム全体の故障率の変化は無視できる[21]。通常、小修理は完全修理よりも安価であるため、特に複雑なシステムにはよく用いられる。小修理の概念は Barlow and Hunter[22]によって導入され、後に Nakagawa and Kowada [23]によって厳密に定義された。小修理は、システムの劣化が取替え直後のような新品と同程度まで回復しないという現象を表す上で最も基本的なモデルとして用いられている。Nakagawa は文献[5]で小修理を適用した多くのモデルを提案している。

完全修理でも小修理でもない修理を不完全修理、あるいは一般修理 (general repair) という。Brown and Proschan[24]は、修理されたシステムの故障率がある一定の確率 p で運用開始時点まで回復し、確率 $1-p$ で修理後も変化しないモデルを提案し、複数の故障分布に対して解析を行った。Block *et al.*[25]はこの考えを発展させ、確率 p が時間に依存するモデルを解析した。また、Kijima[26]は修理後のシステムの若返りにより修理の一般化を表現した。以後、これに基づいた研究が盛んに行われている[27]-[31]。また近年では、技術革新等による修理技術の向上の結果、修理後に運用開始時点より状態がよくなる“better than new”修理に関する研究も行われている[32]。

(C) 取替え

劣化が進んだシステムは、ある時点で取替えを行う必要がある。解析の上では、システムの故障率が初期状態にリセットされるという意味で、取替えと完全修理は同一である。文献[2]では、システムの使用時間に応じて取替えを行う年齢取替、システムを構成する各アイテムの使用時間

を考慮せず，故障時と予め定められた時間でシステム全体を取替えるブロック取替，故障時には小修理を行い，かつ定期的に取替えを行う方策等が提案されており，現在でもそれぞれの取替方策を基にした研究が広く行われている[33]-[35].

故障時に小修理を行うモデルでは，取替えの時期を決定することは非常に重要である．なぜなら，故障率が時間とともに増大するシステムでは，いつまでも小修理を続けるのは結果的に不経済になるからである．これは，劣化の進行したシステムは故障が頻発するので，修理費用が高くなり，かつ修理にかかる時間が長くなることによる．そこで，Park[36]及び Nakagawa[37]は，故障の際に小修理を伴うシステムに対し，取替えを行う最適な故障回数を決定した．

1.2 ダウンタイムと修理遅延時間

システムが要求された機能を遂行できない状態をダウン状態といい、その状態である期間をダウンタイムという。これには、故障状態のまま放置されている時間並びに予防及び事後保全作業等を行う時間が含まれる。このうち、予防保全は計画的に行われるためこれに関連するダウンタイムの管理は容易である。そこで、本論文では故障により生起する計画外のダウンタイムに着目し、以後特に断らない限りダウンタイムは故障発生後からその修復までの間に生起するダウン状態である時間を表すこととする。ダウンタイムの構成要素を図 1.2 に示す(文献[38]一部改変)。

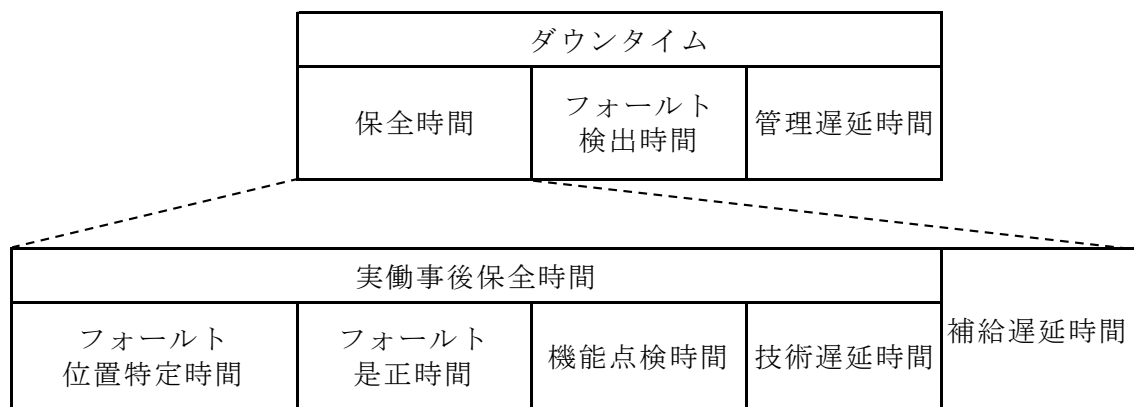


図 1.2 ダウンタイムの分類

各時間の定義は以下のとおりである[4]。

- ・ 保全時間

保全作業が行われた時間

- ・ フォールト検出時間

故障の時点からその結果のフォールト（故障状態）が認識されるまでの期間

- ・ 管理遅延時間
フォールトをもつアイテムに対して，管理的事由で事後保全作業が行われない場合の累積時間
- ・ 実働事後保全時間
事後保全作業が行われた実働保全時間
- ・ フォールト位置特定時間
フォールト位置の特定が行われる時間
- ・ フォールト是正時間
フォールト是正が行われる時間
- ・ 機能点検時間
機能点検が行われる時間
- ・ 技術遅延時間
保全作業そのものに関連する技術作業を行うために必要な累積時間
- ・ 補給遅延時間
保全資源を取得する必要から，保全作業が行われない時間の累積時間のうち，管理遅延時間を除いたもの

本論文では，修理遅延時間を「故障の発生から事後保全作業に着手するまでの時間」と定義し，フォールト検出時間，補給遅延時間及び管理遅延時間から構成されるものとする（図 1.3）.

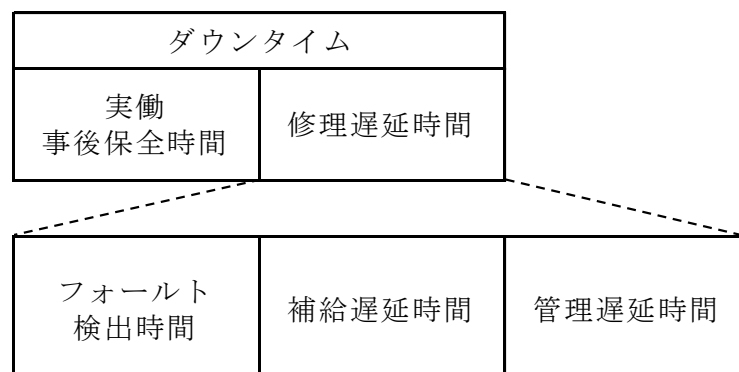


図 1.3 ダウンタイムと修理遅延時間の関係

フォールト検出時間は、故障の発生が直ちに顕在化しないシステムが故障した際に発生する時間である。故障の発生から点検によるその検知までに要する時間といえる。長期間倉庫等で保管されているストレージシステムの故障や、コンピュータへのウイルスの侵入等が発生した際に生起する。

補給遅延時間及び管理遅延時間は、保全資源の取得に時間を要する場合に発生する。この時間が発生している要因により、補給遅延時間が管理遅延時間に分類される。例えば、部品等の発注から実際に手元に届くまでの時間であるリードタイムは補給遅延時間に分類され、修理作業の発注の際に行う入札手続きに必要な時間は管理遅延時間に分類される。

修理遅延時間の削減は、実働事後保全時間の削減同様、システムの稼働率向上に寄与する。しかし、本研究では実働事後保全時間と修理遅延時間は異なる性質をもつことに着目した。即ち、実働事後保全時間は故障の程度や修理施設の保全能力等によってある程度決まる不可避な時間であり、その削減は効率的な手法・工程の開発や現場の人的あるいは物的資源の配置改善等の工夫によって行われることが多い(例えば[39][40])が、修理遅延時間の削減は、点検または状態監視の高頻度化や、船便に代えて航空機輸送により保全資源を取得する等、追加の費用が必要となる場合が多く、それゆえ費用と稼働率に関するトレードオフの関係の中で遅延時間が決定されるという点である。

前節で紹介した先行研究にはダウンタイムの発生を無視できると仮定したものが少なくないが、そのような仮定を置いたモデルであっても、ダウンタイムを考慮するモデルに拡張することは、それを既知の分布または定時間で与えることにより容易に行うことができる[41]-[43]。しかし、これまでの修理遅延時間に関する研究は、それぞれ次節で述べるような不十分な点があり、理論に基づく効率的な保全が行われているとは言い難い例があった。

1.3 現状の問題点と研究の目的

1.1 節で紹介した保全方策研究はいずれも現実の問題を単純化したモデルであるため，比較的汎用性が高く，様々なシステムに適用することができる．しかし，時代の変化やシステムの複雑化，あるいは一般的な運用方法のため容易に適用できないシステムも存在する．以下で，修理遅延時間を構成する 3 種類の時間それぞれに対し，これまでの研究の問題点を述べる．

(A) フォールト検出時間

フォールト検出時間を伴うシステムの代表例は，ミサイル等のワンショットシステムと呼ばれるシステムである．システムの寿命の中で一度しか使用されないことからこのように呼ばれる．ワンショットシステムの故障は点検でのみ発見されるため，一般的に故障の発生から次の点検までの間フォールト検出時間が発生する．このようなシステムに関する研究では，これまで点検で故障が発見された際に取替えを行うことが主に想定されていたため，いかに初めの故障を効率よく発見する点検スケジュールを立案するかに重点が置かれていた[6]-[10]．これは，故障発見問題自体は歴史が古く，当初は故障の発生に指数分布を仮定することが多く，そのため取替えと修理を区別する必要がなかったためと推測する．また，システムが現代ほど複雑ではなかったという背景もある．しかし，現代のミサイル等のシステムは複雑化・高価格化しており，故障が発見された際にはシステムを丸ごと交換するよりは，故障したユニットあるいはより小さい基板等のアイテムを交換することで修復する方法が主流である．このように，複雑なシステムのごく一部のみを取替えて修復する場合，理論的には小修理と考えて差し支えない．しかし，故障が発見された際に小修理を行うワンショットシステムの保全モデルはこれまで提案されておらず，現実の運用と保全モデルに齟齬があった．なお，1.1 節 (C) で述べた通り，故障率が時間とともに増大するシステ

ムに対し小修理を適用する場合，取替時期も考慮する必要がある．

（B）補給遅延時間

補給遅延時間に関しては，待ち行列やマルコフ連鎖を用いた解析が広く行われている[44]．例えば，システムの稼働率を評価する手法[45]や，最適な予備アイテムの数を決定する問題[46]が研究されている．待ち行列においては，客の到着が故障の発生，窓口が保全を行う施設を意味する．このとき，修理等のサービスを受けるシステムの数が同時にサービスを受けることができる窓口の数を越えたときに補給遅延時間が発生する．

一方，現実ではシステムが一定の確率で補給遅延時間が発生する場合もある．例えば，取得する保全資源として，保全施設ではなく予備品等のアイテムや工具を考えると，必要なアイテム等がシステムの運用現場に存在するか否かで補給遅延時間の存否が決まる．このような例は，船舶に搭載されているレーダやソナー等のシステムに当てはまる．通常，船舶には搭載スペースが限られており，事後保全に必要なになるであろう全ての保全資源を搭載することはできない．一部の資源のみ搭載されているので，故障時に必要な資源が搭載されているかどうかは搭載量に依存する一定の確率で表すことが可能である．

故障が発生した際に補給遅延時間が発生する確率が時間に依存しないという意味で，一定の確率による補給遅延時間の発生は，確率過程による発生の単純化とも言えるが，待ち行列を含む確率過程を用いた解析ではこのような場合は明示的には扱われていなかった．よって，船舶に搭載すべき保全資源の決定に際し理論で裏打ちされた手続きを経ることが困難であった．

（C）管理遅延時間

管理遅延時間に関する先行研究では，Kang and Sanchez[47]のようにシミュレーション上のパラメータの一つとして管理遅延時間を扱っている

ものの他、文献[48]-[50]のように、対象システムの管理遅延時間を見積もったケーススタディが大半である。保全方策研究に限ると、管理遅延時間は「無視できる」や、「保全時間に含まれる」との仮定で十分だと考えられてきた。

しかし、管理遅延時間には、前節で述べたように実働事後保全時間とは異なる特徴、即ち稼働率と費用に強いトレードオフの関係がある。例として官公庁がシステムの修理を外注する場合を考えると、競争入札には公募期間等に比較的長い時間が必要だが、うまく機能すれば費用の節約につながる[51]。対して、随意契約では受注業者の提示金額で契約することになるが、すぐに契約を結ぶことができ、修理が早期に完了することでシステムの稼働率に与える影響を局限できるという利点がある。管理遅延時間のもつこのようなトレードオフ性に着目した研究はこれまで行われてこなかった。

保全方策にトレードオフ性を考慮すべきシステムとして、船舶に搭載されているシステムがある。船舶搭載システムが航海中に故障した場合、修理に複数の手段が選択可能であり、その選択の結果として異なる期間の管理遅延時間が生起し得る。例えば、出航した港に戻り修理する方法、航空機等で保全資源を輸送し洋上で修理する方法及び故障を放置し航海を続け航海終了後に港で修理する方法がある。それぞれの方法で発生する管理遅延時間と費用は異なるが、どの修理方法を選択すべきかという問題に対し、トレードオフの考慮なしには明確な基準を示すことが不可能である。

以上のように、修理遅延時間の各構成時間についての研究には不十分な点があり、保全方策に関して現実のシステムへ理論的枠組みを提供できていない。これは、合理的な判断に基づかない保全方策により運用されているシステムの存在を示唆する。このような非合理的あるいは直感的な運用方法は、過剰な保全による費用の増大につながり非効率であるだけでなく、保全間隔等のパラメータの変更が、システムの稼働率及び

費用にどのような影響を及ぼすか不明であり，予期せぬ故障や，それに伴う事故を引き起こす可能性もあり，危険でもある．

本論文では，修理の際に修理遅延時間の各構成時間が発生するシステムをそれぞれ考え，各時間の問題点に対処するための保全モデルを提案する．費用等の目的関数を定式化し，考察を加えることで，これまでの枠組みでは解決できなかった保全方策上の諸問題に対し，意思決定に資する情報を提供することを目的とする．

1.4 論文の内容

修理遅延時間を構成する，フォールト検出時間，補給遅延時間及び管理遅延時間の特徴を考慮した現実的な保全モデルを提案する．なお，基本的にはシステムの稼働率及び費用という２種類の目的関数からなる多目的最適化問題を考えるが，実運用において多くの場合，システムに要求される稼働率が予め決められていることを踏まえ，稼働率の制約を満たしつつ費用が最小となる解を最適解とする．

フォールト検出時間については，故障が発見された際に小修理を行うワンショットシステムを考える．故障の発生から次の点検までフォールト検出時間が発生するものとし，システムの故障率は時間とともに増加すると仮定する．最適な点検間隔及び取替時期を議論する．

補給遅延時間については，それが一定の確率によって発生する，船舶等のビークルに搭載されているシステムを考える．船舶は期間が指数分布に従う航海等の作業に従事しており，搭載されているシステムの故障が即座に修理可能か否かは一定の確率に従う．即座に修理できない場合，ビークルの作業終了後に修理されるものとする．この確率と船舶へ搭載する保全資源の費用が既知の関数であると仮定し，確率を通じた搭載保全資源の最適化を行う．また，システムの故障率として，一定の場合と時間とともに増加する場合を考える．後者では故障に対して小修理が行われると仮定し，取替時期についても議論する．

管理遅延時間に関しても同様にビークルに搭載されているシステムを考える．故障に対して意思決定者の判断で修理時期を含む修理方法を決定できる場合を考える．故障は指数分布に従い発生するものとし，各修理方法の費用とそれにより発生する管理遅延時間の長さが既知のとき，故障が発生した時刻に応じて最適な修理方法を選択する．

本論文の構成は図 1.4 に示すとおりである．

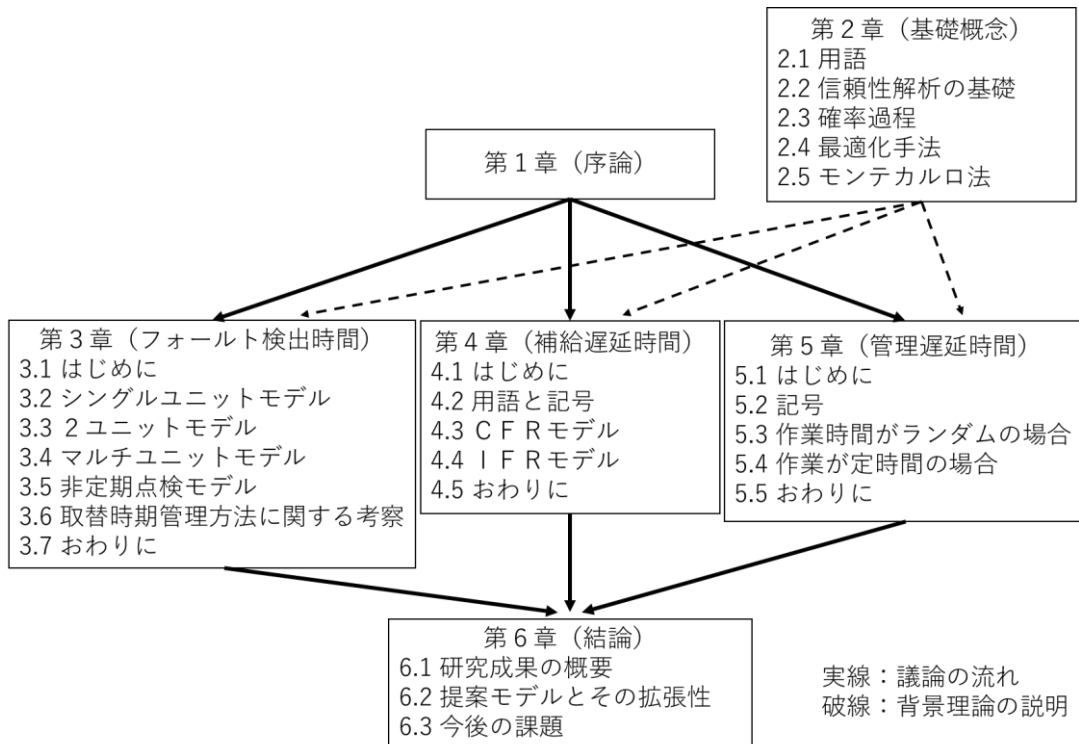


図 1.4 本論文の構成

まず，第2章では本研究で使用する用語，信頼性解析の基礎的事項及び最適化手法等，3章以降の議論の背景となる理論について説明する．続いて，第3，4及び5章で，フォールト検出時間を伴うシステムへの小修理の適用，一定の確率で補給遅延時間が発生するシステム，管理遅延時間を伴うシステムに対する最適な修理方法の選択を取り上げる．第3，4及び5章の内容はそれぞれ独立しており，各章で実用的なモデルを提案し，議論する．最後に第6章では，これらの結果をまとめた結論として本論文の成果を述べる．

第 2 章 基本概念

本章では，本論文で用いる数理的な概念を主に説明する．まず，2.1 節にて本論文で用いる用語を定義する．次に，2.2 節で故障率や信頼性の基礎を説明し，2.3 節で確率過程等の信頼性解析に欠かせない数理的事項を整理する．2.4, 2.5 節では，本研究で用いた最適化の手法及びモンテカルロ・シミュレーションについてそれぞれ説明する．

2.1 用 語

本論文で用いられる用語の定義を以下に示す．

- ・ アイテム

部品，構成品，デバイス，装置，機器等の総称

- ・ システム

所定の任務を達成するために，選定され，配列され，互いに連携して動作する一連のアイテム（ハードウェア及びソフトウェア）の組み合わせ

- ・ ユニット

システムを構成するアイテムで，保全実施単位のもの

- ・ フォールト検出時間

故障の時点からその結果のフォールトが認識されるまでの期間

- ・ 管理遅延時間

フォールトをもつアイテムに対して，管理的事由で事後保全作業が行われない場合の累積時間

- ・ 補給遅延時間

保全資源を取得する必要から，保全作業が行われない時間の累積時間のうち，管理遅延時間を除いたもの

- 修理遅延時間
故障の発生から事後保全作業に着手するまでの時間（フォールト検出時間，補給遅延時間及び管理遅延時間の和）
- ダウン状態
要求機能遂行不能によって特徴付けられるアイテムの状態
- ダウンタイム
故障発生後に発生する，アイテムがダウン状態にある期間
- 信頼度
アイテムが与えられた条件の下で，与えられた時間間隔に対して，要求機能を実行できる確率
- 信頼度関数
信頼度を表す時間の関数
- 故障
アイテムが要求機能達成能力を失うこと
- 故障分布関数
アイテムの故障寿命を確率変数とみなすときの分布関数
- 一般分布
一般的な故障分布関数
- 故障率
当該時点でアイテムが可動状態にあるという条件を満たすアイテムの当該時点での単位時間当たりの故障発生率
- 故障率関数
故障率を表す時間の関数
- 累積故障率関数
故障率関数を累積した関数
- 保全
ユニットを使用及び運用可能状態に維持し，または故障，欠点などを回復するためのすべての処置及び活動

- ・修理

規定の要求仕様を満足しなくなったユニットを再び使えるようにする
保全

- ・取替え

ユニットを新品と交換することにより行われる保全

- ・平均アベイラビリティ

要求された外部資源が供給されるとき，与えられた時間間隔に対し，
システムが与えられた条件の下で要求機能遂行状態にある確率

- ・平均アンアベイラビリティ

平均アベイラビリティを A と表したときに， $1-A$ で表される値

- ・平均コストレート

単位時間当たりの期待費用

- ・リスク

ある事象が発生する確率と，それが発生したときの損失コストの積

2.2 信頼性解析の基礎（文献[52][53]による）

本節では，信頼性に関わる基礎的な数理分野について説明する．

2.2.1 信頼度関数と故障率関数

システムを時刻 0 で使い始めてから故障するまでの時間を表す確率変数を X とする ($X > 0$)．システムの故障分布関数を $F(t)$ とすると， $F(t)$ は X の累積分布関数であるので，ある時刻 t ($t \geq 0$) までに故障が起こる確率は，

$$\Pr(X \leq t) = F(t) \quad (2.1)$$

で表される．式(2.1)を故障分布関数という．逆に，時刻 t までに故障が発生していない確率は，

$$\Pr(X > t) = \bar{F}(t) \quad (2.2)$$

であり，これは信頼度関数である．ただし，本論文では任意の関数 Φ に対して $\bar{\Phi} \equiv 1 - \Phi$ と表記する．

故障分布関数が微分可能なとき，

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (2.3)$$

を故障確率密度関数という．これを用いて，時間間隔 (t_1, t_2) で故障が発生する確率は，

$$\Pr(t_1 < X \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1) \quad (2.4)$$

で表される．また，明らかに，故障確率密度関数と信頼度関数の間には，

$$f(t) = -\frac{d\bar{F}(t)}{dt} \quad (2.5)$$

という関係がある．

図 2.1 に，信頼度関数，故障分布関数及び故障確率密度関数の関係を示す．

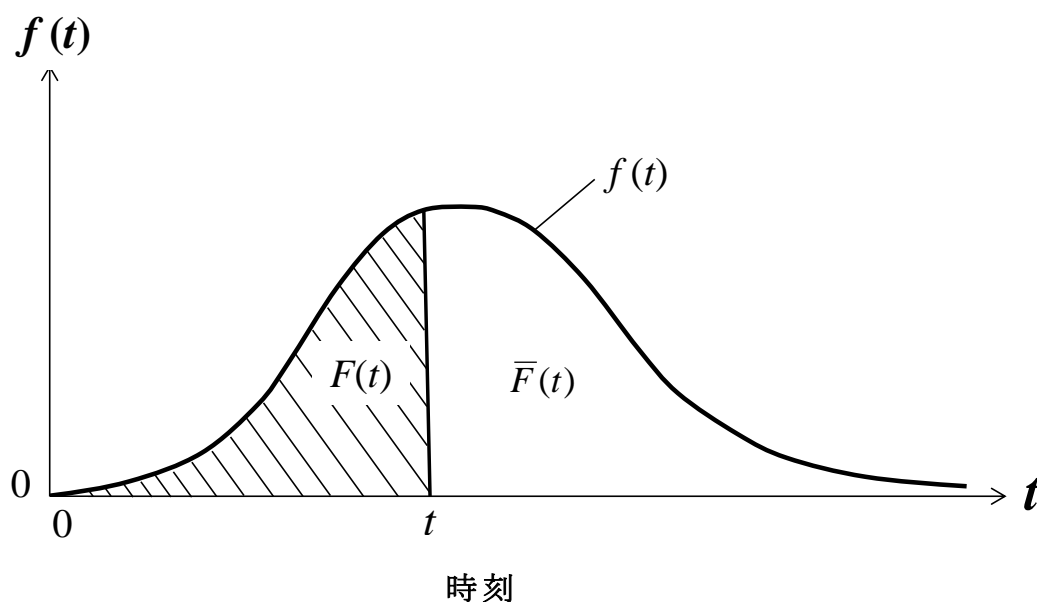


図 2.1 信頼度関数，故障分布関数及び故障確率密度関数の関係

時刻 t での故障率 $h(t)$ は，時刻 t で稼働しているシステムのうち，引き続き微小時間で故障する割合を表す．よって，

$$h(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < X < t + \Delta t) / \Delta t}{\Pr(X > t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad (2.6)$$

で定義される．故障率関数は時間の関数であるが，これを時間で積分した関数 $H(t)$ は，累積故障率関数と呼ばれる．

$$H(t) = \int_0^t h(x) dx \quad (2.7)$$

故障率と信頼度関数との関係は，式(2.5)と(2.6)から，

$$h(t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \left(-\frac{d}{dt} \bar{F}(t) \right) = -\frac{d}{dt} \ln \bar{F}(t) \quad (2.8)$$

であり，また，

$$\bar{F}(t) = \exp\{-H(t)\} \quad (2.9)$$

で表される．

故障分布関数 $F(t)$ に従う確率変数の期待値は，システムの平均稼働時間 μ と一致し，式(2.10)で計算できる．

$$\mu = \int_0^{\infty} t dF(t) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt \quad (2.10)$$

これを単に平均と呼ぶこともある．なお，本論文では，故障分布関数が微分可能であり，平均値が有限の値をもつ場合のみ扱う．

一般に，システムの故障率はその経過時間につれて図 2.2 のように変化するといわれている．このように，故障率を時間の関数として捉えた故障率関数の曲線は，その形からバスタブカーブと呼ばれる．

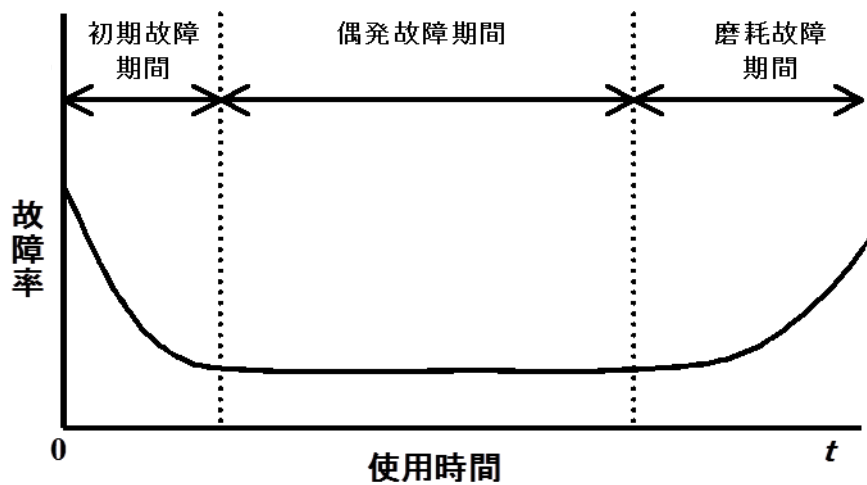


図 2.2 故障率の時間変化

人間の年齢別死亡率は、人間をシステムと見なした場合の故障率に相当する。出生からしばらくは、抵抗力が弱いため死亡率は高く、成長とともに死亡率は低下していく。そして青壮年期で安定し、その後老年期になると年齢が上がるに従い死亡率は増加する。同様にシステムも使用時間の初期には、不良品の混入や、ある程度使い込むまでは故障が発生しやすいという理由により、故障率は高い。以後それらが是正されるに従い減少し、安定した低い故障率を示すようになる。さらに時間が経過すると、磨耗による故障が頻発し、システムは廃棄せざるを得なくなる。このような類似性から、使用時間を年齢、稼働時間（故障発生時刻）を寿命ということもある。

前述の第一の期間を初期故障期間という。故障率が時間の単調減少関数になっており、この性質を DFR (Decreasing Failure Rate) という。この時期の故障率を小さくするためには、機器の運用前に慣らし運転や予備試験をする必要がある。第二の期間は偶発故障期間であり、故障率は時間によらず一定である。この性質を CFR (Constant Failure Rate) という。故障は偶発的に発生する。第三の期間は磨耗故障期間といわれ、故障率は時間の単調増加関数となっている。この性質を IFR (Increasing Failure Rate) という。この期間には故障が頻発するようになり、機器を使用し続けることは経済的に難しくなる。

ただし、実在するシステムの故障率が全て図 2.2 のようなバスタブカーブを描くわけではない。例えば、システムの種類によっては偶発故障期間が短い場合もある。また、出荷前の様々な試験により初期故障期間がない場合もある。

2.2.2 指数分布とワイブル分布

CFR の故障分布関数について、その故障率を λ とすると、式(2.9)より、

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.11)$$

となる．これをパラメータ λ の指数分布といい，その平均は $1/\lambda$ となる．システムの故障の発生が式(2.11)に従うとき，故障が発生する時刻を表す確率変数を X とし，システムが時刻 x まで稼働しているという条件の下，さらに t 時間以上稼働する確率 $\bar{F}(t|x)$ は，

$$\bar{F}(t|x) = \Pr(X > x+t | X > x) = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t} = \bar{F}(t) \quad (2.12)$$

となる．つまり，ある時点で稼働中のシステムが引き続きある時間稼働する確率は，これまでの稼働時間に依存しない．この性質を無記憶性という．

DFR, CFR 及び IFR の全てを表せる故障分布関数の一つとして，ワイブル分布が挙げられる．ワイブル分布の故障確率密度関数，故障分布関数，故障率関数及び信頼度関数はそれぞれ式(2.13)から式(2.16)で与えられる．

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta} \right\} \quad (2.13)$$

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta} \right\} \quad (2.14)$$

$$h(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (2.15)$$

$$\bar{F}(t) = \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta} \right\} \quad (2.16)$$

η を尺度パラメータ， β を形状パラメータと呼ぶ． $\beta < 1$ のとき，故障率関数は単調減少関数となり，DFR を表すことができる．一方 $\beta > 1$ のときは，故障率関数は単調増加となり，IFR を表すことができる．また， $\beta = 1$ のときは CFR を表し，パラメータ $1/\eta$ の指数分布に一致する．

ワイブル分布の平均は

$$\mu = \eta \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) \quad (2.17)$$

で表される．ただし， $\Gamma(x)$ はガンマ関数を表し，

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy \quad (2.18)$$

である．特に， x が1以上の整数のとき，

$$\Gamma(x) = (x-1)! \quad (2.19)$$

である．

2.2.3 直列・並列システムの信頼度

システムは通常様々なユニットから構成される．ここでは， m 個のユニットから構成されるシステムを考える．各ユニットの故障は独立に発生するものとし，ユニット i の信頼度関数，故障率関数及び故障確率密度関数をそれぞれ $\bar{F}_i(t)$ ， $h_i(t)$ 及び $f_i(t)$ で表す．

これらのユニットが直列に接続されていると， m 個のユニットの内1個でも故障が発生すると，システム全体が故障状態となる．このときシステムの信頼度関数 $\bar{F}_s(t)$ は，

$$\bar{F}_s(t) = \prod_{i=1}^m \Pr(X_i > t) = \prod_{i=1}^m \bar{F}_i(t) \quad (2.20)$$

と表される．ただし， X_i はユニット i の稼働時間を表す確率変数である．同様に，システムの故障率関数 $h_s(t)$ は式(2.8)より

$$h_s(t) = -\frac{d}{dt} \ln \bar{F}_s(t) = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m \ln \bar{F}_i(t) = \sum_{i=1}^m \frac{f_i(t)}{\bar{F}_i(t)} = \sum_{i=1}^m h_i(t) \quad (2.21)$$

となり，各ユニットの故障率関数の和と一致する．

一方，ユニットが並列に接続されているとき， m 個のユニット全てが故障した時点でシステムは故障する．このときのシステムの信頼度関数は，

$$\bar{F}_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^m \Pr(X_i < t) = 1 - \prod_{i=1}^m F_i(t) \quad (2.22)$$

と表され， m が増加するとともにシステムの信頼度が向上することが分かる．

2.3 確率過程 (文献[53]-[55]による)

本節では，保全性解析に用いる確率過程について説明する．

$N(t)$ を，時刻 $t(t \geq 0)$ におけるシステムの状態を表す確率変数とする． t のとり得る値の集合を T とすると， $\{N(t), t \in T\}$ を確率過程と呼ぶ．時間 t が可算な集合 $t=0, 1, 2, \dots$ あるいは単位時間の倍数ならば，確率過程は離散形時間確率過程という．一方，時間 t が連続ならば，連続形時間確率過程という． $N(t)$ のとり得る値の集合を状態空間という．ここでは離散形の状態空間のみを扱う．

事象の発生回数を数える確率過程を計数過程といい，次のように定義される．

定義 2.1

連続形時間確率過程が以下の条件を満たすとき，計数過程という．

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ は整数である
3. $N(t)$ は t の非減少関数である
4. $s < t$ において， $N(t) - N(s)$ は時間間隔 $(s, t]$ における事象の発生回数を表す

これを用いて，次小節から具体的な確率過程について説明する．

2.3.1 定常ポアソン過程

任意の $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対し，確率変数 $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ が独立ならば，この過程は独立増分をもつという．ここで， $N(t_k) - N(t_{k-1})$ は増分と呼ばれる．また，任意の $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 及び任意の $\Delta t > 0$ に対し，確率変数の組 $(N(t_1 + \Delta t), N(t_2 + \Delta t), \dots, N(t_n + \Delta t))$ の同時分布が $(N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_n))$ の同時分布と等しいならば，この過程は定常増分をも

つという．独立増分かつ定常増分をもつ確率過程は，定常独立増分をもつという．

定常ポアソン過程は次のように定義される．

定義 2.2

計数過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ が次の条件を満たすとき，パラメータ λ の定常ポアソン過程という．

1. $N(0)=0$
2. 定常独立増分をもつ
3. 時間間隔 $(t, t+\Delta t]$ で事象が 1 回発生する確率は $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ である
4. 時間間隔 $(t, t+\Delta t]$ で 1 回より多くの事象が発生する確率は $o(\Delta t)$ である

ここで， $o(\Delta t)$ は

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad (2.23)$$

を満たす関数である．

定常ポアソン過程は図 2.3 に示すような計数過程である．

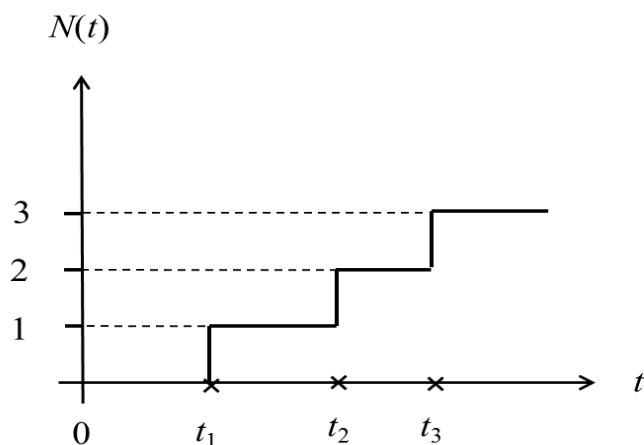


図 2.3 定常ポアソン過程の一例

時間間隔 $(0, t]$ において k 回の事象が発生する確率を

$$P_k(t) = \Pr\{N(t) = k | N(0) = 0\} \quad (2.24)$$

と定義する．定常独立増分をもつので，任意の時間間隔 $(s, s+t]$ において k 回の事象が発生する確率は，

$$\Pr\{N(s+t) - N(s) = k\} = P_k(t) \quad (2.25)$$

となり，時刻 s とは独立となる．

定義 2.2 の 2 から 4 項より，

$$\Pr\{N(t+\Delta t) - N(t) = k | N(t) = i\} = \begin{cases} 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) & (k=0) \\ \lambda\Delta t + o(\Delta t) & (k=1) \\ o(\Delta t) & (k>1) \end{cases} \quad (2.26)$$

となる． $P_k(t+\Delta t)$ は時間間隔 $(0, t], (t, t+\Delta t]$ で独立であるから， $P_0(t+\Delta t)$ について，

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) = P_0(t)\{1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\} \quad (2.27)$$

が成り立つ． $P_k(t+\Delta t)$ ($k \geq 1$) についても同様に，

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\{\lambda\Delta t + o(\Delta t)\} + P_k(t)\{1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\} + \sum_{i=0}^{k-2} P_i(t)o(\Delta t) \quad (2.28)$$

が成り立つ．式(2.27)及び(2.28)について， $\Delta t \rightarrow 0$ とすると， $P_k(t)$ に関する微分方程式(2.29), (2.30)が得られる．

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad (2.29)$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t) \quad (2.30)$$

これらを初期条件 $P_0(0)=1$, $P_k(0)=0$ ($k \geq 1$) を用いて解くと,

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}, \quad P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}, \quad \dots$$

となる．数学的帰納法により，式(2.31)が導かれる．

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.31)$$

次に，事象の発生時間に着目する． X_1 を初めて事象が起こるまでの時間とする，同様に， X_n を $n-1$ 回目から n 回目の事象が起こるまでの時間とする．このとき， $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$ は到着時間列と呼ばれる．さらに， S_n を時刻 0 から n 回目の事象が起こるまでの時間とすると，

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.32)$$

である．また， $S_0=0$ とする． X_1 の分布は

$$\Pr(X_1 < t) = 1 - \Pr(X_1 \geq t) = 1 - \Pr\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.33)$$

であるから，パラメータ λ の指数分布に従う．さらに，定常独立増分をもつので， $X_1=s$ であるという条件の下， $X_2 < t$ である条件付き確率 $\Pr(X_2 < t | X_1 = s)$ は，

$$\begin{aligned} \Pr(X_2 < t | X_1 = s) &= 1 - \Pr(X_2 \geq t | X_1 = s) = 1 - \Pr\{N(t+s) - N(s) = 0 | X_1 = s\} \\ &= 1 - \Pr\{N(t+s) - N(s) = 0\} = 1 - \Pr\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (2.34)$$

となり， X_2 の分布も X_1 と同じ分布に従う．同様に，全ての到着時間はパラメータ λ の指数分布に従う．

2.3.2 非定常ポアソン過程

単位時間当たりの事象の発生数を強度という．定常ポアソン過程では，強度が常に一定の値(λ)であった．非定常ポアソン過程では，強度が時間に依存することを認め，定常ポアソン過程を一般化した確率過程である．つまり，定常増分をもたない．

定義 2.3

確率過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ が以下の条件を満たすとき，強度関数 $\lambda(t)$ の非定常ポアソン過程という．

1. $N(0)=0$
2. 独立増分をもつ
3. 時間間隔 $(t, t+\Delta t]$ で事象が 1 回発生する確率は $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$ である
4. 時間間隔 $(t, t+\Delta t]$ で 1 回より多くの事象が発生する確率は $o(\Delta t)$ である

2.3.1 節と同様の議論により，以下の微分方程式が得られる．

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda(t)P_0(t) \quad (2.35)$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda(t)P_k(t) + \lambda(t)P_{k-1}(t) \quad (2.36)$$

これらを初期条件 $P_0(0)=1, P_k(0)=0 (k \geq 1)$ を用いて解くと，

$$P_k(t) = \frac{[\Lambda(t)]^k}{k!} e^{-\Lambda(t)} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.37)$$

となる．ただし，

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx \quad (2.38)$$

である．式(2.37)は平均 $\Lambda(t)$ のポアソン分布の確率質量関数であるから，

$$E[N(t)] = \Lambda(t) \quad (2.39)$$

となる． $\Lambda(t)$ は平均値関数と呼ばれる．なお， S_n の分布関数は

$$\Pr(S_k < t) = \Pr\{N(t) \geq k\} = 1 - \Pr\{N(t) \leq k-1\} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{[\Lambda(t)]^i}{i!} e^{-\Lambda(t)} \quad (2.40)$$

で表される．

2.3.3 再生過程

定常ポアソン過程での各事象の到着間隔が同じパラメータの指数分布に従うのは前述の通りである．定常ポアソン過程における到着時間分布を一般の分布に拡張したものが再生過程である．

定義 2.4

計数過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ において，各事象の到着時間間隔 $\{X_1, X_2, \dots\}$ が独立で，同一の分布 $F(t)$ をもつ確率過程を再生過程という，

再生過程 $\{N(t), t \geq 0\}$ において，再生（初期状態に戻る事）の到着時間間隔 X_k の分布は，

$$F(t) = \Pr\{X_k \leq t\} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.41)$$

となる．さらに，時刻 t までに発生する事象の回数は， n 回目の再生が起こるまでの時間 S_n を用いて

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\} \quad (2.42)$$

となるのは明らかである． S_n は独立で同一の分布 $F(t)$ に従う確率変数の和であるから， S_n の分布は

$$\Pr\{S_n \leq t\} = F^{[n]}(t) \quad (2.43)$$

と表される． ここで， $F^{[n]}(t)$ は $F(t)$ の n 重の畳み込みであり，

$$F^{[0]}(t) = 1 \quad (2.44)$$

$$F^{[1]}(t) = F(t) \quad (2.45)$$

$$F^{[n]}(t) = F * F^{[n-1]}(t) = \int_0^t F^{[n-1]}(t-x) dF(x) \quad (n \geq 2) \quad (2.46)$$

である． ただし， $*$ は畳み込みを表す．

時刻 t までに発生した再生回数がちょうど n である確率は，

$$\begin{aligned} \Pr\{N(t) = n\} &= \Pr\{N(t) \geq n\} - \Pr\{N(t) \geq n+1\} \\ &= \Pr\{S_n \leq t\} - \Pr\{S_{n+1} \leq t\} = F^{[n]}(t) - F^{[n+1]}(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.47)$$

である．

$N(t)$ の平均 $M(t) = E[N(t)]$ は再生関数と呼ばれる． 平均の定義から $M(t)$ は，

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \Pr\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n \{F^{[n]}(t) - F^{[n+1]}(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} n F^{[n]}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n F^{[n+1]}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n F^{[n]}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) F^{[n+1]}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{[n+1]}(t) \\ &= F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{[n+1]}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{[n]}(t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

と表される． つまり n 重の畳み込みを $n=1$ から無限大まで足し合わせれ

ばよい．

次に， $N(t)/t$ と $M(t)/t$ の漸近的な挙動を調べる．図 2.4 は $S_{N(t)}$ と $N(t)$ の関係を示している．

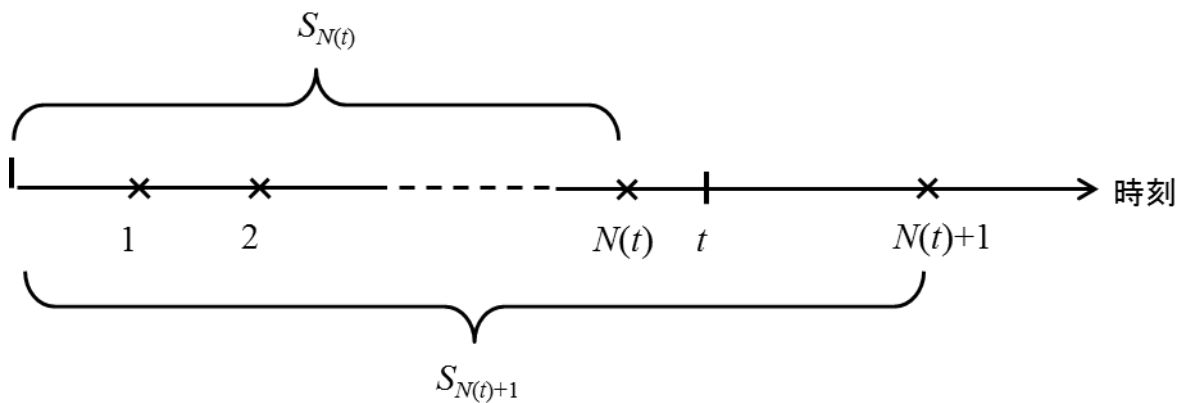


図 2.4 $S_{N(t)}$ と $N(t)$ の関係

図から，

$$S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1} \quad (2.49)$$

であるので，

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \quad (2.50)$$

が成り立つ．大数の強法則から， $N(t) \rightarrow \infty$ のとき，確率 1 で $S_{N(t)}/N(t) \rightarrow \mu$ ， $S_{N(t)+1}/\{N(t)+1\} \rightarrow \mu$ となる．ただし， μ は $F(t)$ の平均である．はさみうちの原理から，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad (2.51)$$

となることがわかる．

ところで， $F(t)$ のラプラス・スチルチェス変換を， s をラプラス演算

子として

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) \quad (2.52)$$

と表すことにする． s の実部 $\operatorname{Re}(s) > 0$ とすると，

$$|\tilde{F}(s)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} dF(t) \right| \leq \int_0^\infty |e^{-st}| dF(t) < \int_0^\infty 1 \cdot dF(t) = 1 \quad (2.53)$$

であるので，式(2.48)と合わせて， $M(t)$ のラプラス・スチルチェス変換は

$$\tilde{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dM(t) = \sum_{n=1}^\infty [\tilde{F}(s)]^n = \frac{\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)} \quad (2.54)$$

となる． また， $\tilde{F}(s)$ を s で微分すると

$$\tilde{F}'(s) = \int_0^\infty (-te^{-st}) dF(t) \quad (2.55)$$

なので， $s=0$ を中心としたテイラー展開は

$$\tilde{F}(s) = 1 - \mu s + o(s) \quad (2.56)$$

と表される． これを式(2.54)に代入することにより，

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{M}(s) = \frac{1}{\mu} \quad (2.57)$$

が得られる．

ここで，タウバー型定理を説明する．証明は文献[56]を参照されたい．

定理 2.1 (タウバー型定理)

$F(t)$ が非減少関数で, そのラプラス・スチルチェス変換 $\tilde{F}(s)$ が s の実部 $\text{Re}(s)>0$ で収束し, ある非負の数 α に対して $\lim_{s \rightarrow +0} s^\alpha \tilde{F}(s) = C$ ならば, $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)/t^\alpha = C/\Gamma(\alpha+1)$ が成り立つ. ただし, C は定数とする.

タウバー型定理を式(2.57)に適用することにより, 次の基本再生定理が導かれる.

定理 2.2 (基本再生定理)

$t \rightarrow \infty$ のとき, 再生関数 $M(t)$ は

$$\frac{M(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$$

2.3.4 交代再生過程

状態 1 と状態 2 を交互に繰り返すシステムを考える. 例えば, 稼働状態とダウン状態である. システムがそれぞれの状態にある時間が独立で, 同一の分布に従うとき, この確率過程を交代再生過程という.

状態 1 にある時間を表す確率変数を X_n , 状態 2 にある時間を表す確率変数を Y_n とすると, 時刻 0 から無限大までの間で, 状態 1 にある確率 A は, 大数の強法則より,

$$A = \frac{E[X_n]}{E[X_n + Y_n]} = \frac{E[X_n]}{E[X_n] + E[Y_n]} \quad (2.58)$$

となる. つまり, システムが状態 1 に遷移してから, 次に状態 1 に遷移するまでを 1 サイクルと考えると, 状態 1 にある時間の平均を, 1 サイクルの時間の期待値で割ればよい.

2.3.5 再生報酬過程

再生過程において，再生が生起するたびに報酬を受け取ると仮定した確率過程を再生報酬過程という．

n 回目 ($n \geq 1$) の再生で得られる報酬を C_n とし，時刻 t までに得られた報酬の合計を $C(t)$ とする．ただし， C_n は有限の期待値をもち， X_n とは独立であるとする． $C(t)$ と C_n の関係は次式となる．

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} C_n \quad (2.59)$$

ここで，単位時間当たりの報酬 $C(t)/t$ の漸近的な挙動を調べる．まず，

$$\frac{C(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} C_n}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} C_n}{N(t)} \cdot \left(\frac{N(t)}{t} \right) \quad (2.60)$$

と表される．また，大数の強法則より， $t \rightarrow \infty$ のとき，

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} C_n}{N(t)} \rightarrow E[C_n] \quad (2.61)$$

であるので，式(2.51)と合わせると， $t \rightarrow \infty$ のとき，式(2.60)は確率 1 で次式となる．

$$\frac{C(t)}{t} \rightarrow \frac{E[C_n]}{\mu} \quad (2.62)$$

つまり，時間を無限大にすると，単位時間当たりの報酬は，1 回当たりの報酬の期待値を到着時間の期待値で割った値に等しい．

次に，単位時間当たりの報酬の期待値である， $E[C(t)]/t$ の漸近的な挙

動を調べる．

まず準備として，停止時刻について説明する． N が整数をとる確率変数で， $N=n$ という事象が $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots (n=1, 2, \dots)$ と独立ならば， N は X_1, X_2, \dots の停止時刻であるという．停止時刻は，時刻を確率変数として扱うものであり，例えば，コイン投げで表が出ると 1 点を獲得するようなゲームを考え， n 回目の試行で得られる得点の確率変数を X_n で表したとき，

$$N = \min\{n : X_1 + \dots + X_n \geq 10\} \quad (2.63)$$

とすると，式(2.63)は，初めに 10 点を獲得したときにゲームをやめることを表す． N はゲームをやめるときの試行回数を表し， X_{n+1}, X_{n+2}, \dots とは独立なので，停止時刻であるといえる．

次に，ワルドの等式と呼ばれる次の定理を説明する（証明は文献[55]参照）．

定理 2.3（ワルドの等式）

X_{n+1}, X_{n+2}, \dots を互いに独立で同じ分布に従う確率変数， N を停止時刻とする． $E[X_n]$ と $E[N]$ が有限の期待値をもつとき， X_n の和の平均について次の等式が成り立つ．

$$E\left[\sum_{n=1}^N X_n\right] = E[N] \cdot E[X_n]$$

これを用いると，前述のコインゲームにおける式(2.63)を満たす N の期待値は

$$10 = \frac{1}{2} E[N]$$

より，20 であることがわかる．

ワルドの等式を用いると，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)] \cdot E[C_n]}{t} \quad (2.64)$$

であるから，基本再生定理から，次の定理を得る．

定理 2.4

再生報酬過程において，再生の到着時間の期待値を μ とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_n]}{\mu}$$

各再生の到着時間間隔を 1 サイクルと考えると，1 サイクルの平均時間は μ であり，1 サイクルで得られる報酬の期待値は $E[C_n]$ である．したがって，十分時間が経過したときの単位時間当たりの期待報酬は，1 サイクル当たりの期待報酬 $E[C_n]/\mu$ に近づいていくということである．

2.4 最適化手法

本節では，本論文で用いる最適解を得るための手法を説明する．

最適化問題は一般的に，決定変数ベクトル \mathbf{x} ，最小化すべき目的関数 $f(\mathbf{x})$ 及び制約条件 $\mathbf{x} \in R$ によって表される． R を実行可能領域と呼び，個々の解 \mathbf{x} を実行可能解と呼ぶ．

2.4.1 傾斜法（文献[57]による）

関数 $f(\mathbf{x})$ の局所的な最小点が存在するとき，その点を求めることを考える．このような解を局所最適解という．ここでは $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ で局所的な最小点をもつとする．さらに，次のような仮定を設ける．ただし， $\|\mathbf{x}\|$ はベクトル \mathbf{x} の大きさを表す．

- (1) f の最小点 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ は孤立している．即ち， K が十分小さければ， $0 < \|\mathbf{x}\| < K$ において， $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{0})$ である．
- (2) 関数 f は十分小さい K に対し， $0 < \|\mathbf{x}\| < K$ で $\|\mathbf{x}\|$ に関して単調減少する．

3次元空間を考えると，これらの仮定は， c を定数として， $f(\mathbf{x})=c$ となる等高線は， c が $f(\mathbf{0})$ に十分近いときは， $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を含む閉じた線になっていることを意味している．さらに， $c_1 < c$ とすると， $f(\mathbf{x})=c_1$ の等高線は $f(\mathbf{x})=c$ の等高線で囲まれる図形の中に存在することを意味している．図 2.5 はこの場合の等高線の様子を示している．

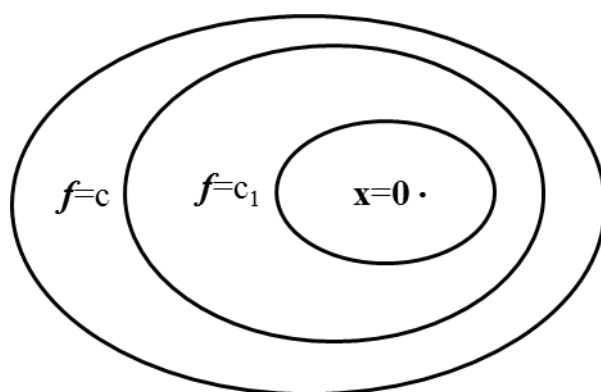


図 2.5 最小値付近の等高線の様子

傾斜法とは，このような条件が成り立つ関数の最小値を反復法で求める最適化手法である．その中でも最急降下法は，最も勾配の大きい方向へ解を更新していく方法である． k 回目の反復の解が $\mathbf{x}^{(k)}$ であるとき，次式のように値を更新する．

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)} - r\Delta\mathbf{f} \quad (2.65)$$

ただし， $:=$ は代入操作を表す．また， $\Delta\mathbf{f}$ は勾配ベクトルであり，最急降下法の場合，等高線に対して常に直角である． r は 1 回の計算で更新する数値の割合を決めるパラメータであり，通常は小さな正の定数である．

2.4.2 黄金分割法（文献[57]による）

目的関数が 1 変数の連続関数で，以下で定義される単峰性をもつ場合を考える．

定義 2.5

関数 $f(x)$ が区間 (a, b) で唯一の停留点（最大点または最小点）をもつとき， $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で単峰性を有するという．

区間を狭めることで停留値（ここでは最小値）を探索する方法を考える．探索区間を狭めるには，少なくとも区間内の 2 点で関数の値を知る必要があることを，図 2.6 を用いて説明する．

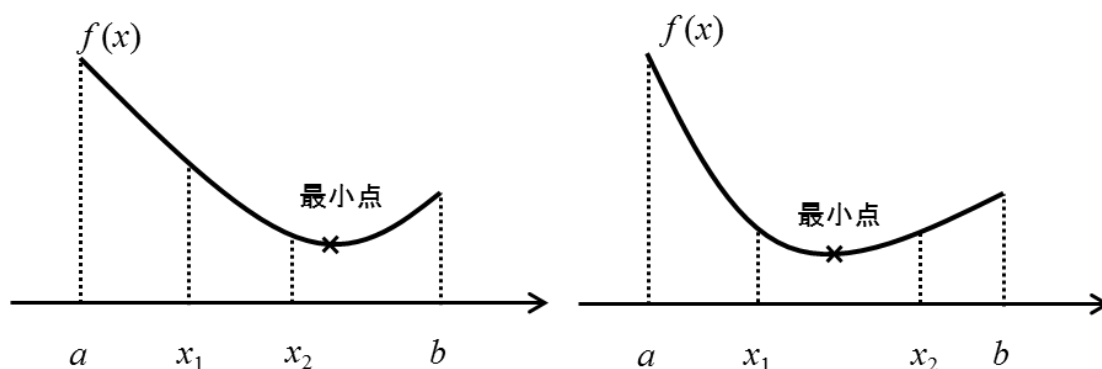


図 2.6 単峰関数の最小点の存在位置

明らかに，区間 (a, b) 内の点 x_1 での値を求めるだけでは，最小点があるどちら側にあるかが確定できない．図 2.6 では，別の点 x_2 ($a < x_1 < x_2 < b$) での値を求めることにより， $f(x_1) > f(x_2)$ であれば最小点は区間 (x_1, b) に， $f(x_1) < f(x_2)$ であれば区間 (a, x_2) に存在することを表している．

探索の際，毎回のステップで一定の割合だけ区間を減少することを考えると，その比率は黄金比 $\varphi = 0.6180\dots$ となる（証明は文献[57]参照）． i ステップ目の区間を $(a^{(i)}, b^{(i)})$ ，関数の値を求めるべき点を $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ ($x_1^{(i)} < x_2^{(i)}$) とすると，このアルゴリズムは， $f(x_1^{(i)})$ と $f(x_2^{(i)})$ の大小に応じて以下のどちらかを選択するのみで進行する．

(i) $f(x_2^{(i)}) > f(x_1^{(i)})$ のとき

$$b^{(i+1)} = x_2^{(i)}$$

$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i)}$$

$$x_1^{(i+1)} = a^{(i)} + (1 - \varphi)(b^{(i+1)} - a^{(i)})$$

(ii) $f(x_1^{(i)}) > f(x_2^{(i)})$ のとき

$$a^{(i+1)} = x_1^{(i)}$$

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}$$

$$x_2^{(i+1)} = b^{(i)} - (1 - \varphi)(b^{(i)} - a^{(i+1)})$$

毎回のステップで探索区間が黄金比の割合で減少するため，この方法は黄金探索法と呼ばれる．アルゴリズムが単純である上の探索区間減少割合（即ち探索の効率）が大きいことが知られている．

2.4.3 アニーリング法（文献[58]による）

アニーリング法は，焼きなまし法とも呼ばれるメタヒューリスティックな方法である．現在の解 \mathbf{x} の近傍 $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 内の解 \mathbf{x}' に，解の良さに応じた遷移確率を設定し，それに従って次の解を選ぶ方法である．改悪解への遷移を許すことにより，局所最適解からの脱出を図る．アルゴリズムの概要は以下である．

ステップ 1：初期解 \mathbf{x} を生成する．また，初期温度 t を定める．

ステップ 2：以下のステップ a, b 及び c を，ループの終了条件が満たされるまで反復する．

a: $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 内の解をランダムに一つ選び \mathbf{x}' とする．

b: $\Delta := f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})$ とする（ \mathbf{x}' が改悪解なら $\Delta > 0$ となる）．

c: $\Delta \leq 0$ ならば確率 1, そうでなければ確率 $\exp(-\Delta/t)$ で解 \mathbf{x}' へ遷移する．

ステップ 3：反復の終了条件が満たされれば現在の解を最適解として終了する．そうでなければ，温度 t を更新した後ステップ 2 に戻る．

ステップ 3 の温度更新は冷却スケジュールとも呼ばれ，様々な方法が

提案されている．冷却に十分時間をかけるとある条件の下で最適解へ漸近収束することが知られているが，実用的には，0 から 1 の間のパラメータを毎回乗じる幾何冷却法と呼ばれる方法がよく用いられる．

2.5 モンテカルロ法（文献[59]による）

本研究で提案した近似解法の精度の確認等に用いたモンテカルロ・シミュレーション及びそれに付随する乱数発生方法についてについて説明する．

2.5.1 逆関数法

逆関数法とは，分布関数の逆関数を用いて乱数を発生させる方法である．確率変数 X が $t>0$ で故障確率密度関数 $f(t)$ をもっているとするとき，

$$U = \int_0^X f(t)dt \quad (2.66)$$

で表される確率変数 U は区間 $[0,1]$ で一様分布となる．したがって，一様乱数列 $\{U_i\}$ を発生して，

$$\int_0^{X_i} f(t)dt = U_i \quad (2.67)$$

を満たす数列 $\{X_i\}$ を求めると， $\{X_i\}$ は与えられた故障確率密度 $f(X)$ をもつ乱数列となっている（証明は文献[59]参照）．

例えば，パラメータ λ の指数分布に従う乱数は，式(2.11)を用いて

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U) \quad (2.68)$$

で与えられ，尺度パラメータ η 及び形状パラメータ β のワイブル分布に従う乱数は，式(2.14)を用いて

$$X = \eta \left(\ln \frac{1}{1-U} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.69)$$

で与えられる．

2.5.2 モンテカルロ・シミュレーション

モンテカルロ・シミュレーションとは，乱数を用いて試行を繰り返して行い，得られた値の平均を真の値と推定する方法のことである．前節で説明した逆関数法によりシステムの故障時刻を与えることにより，保全費用や稼働率の期待値を求めることができる．真の乱数を用いた場合，大数の強法則より，サンプル数（試行回数）が無限に多いとき，必ず真の値を得ることができる．しかし現実にはサンプル数は有限であり，統計的誤差が発生する．標準偏差で評価されるこの誤差は，サンプル数の1/2 乗に反比例する．従って，試行回数を増やすと標準偏差は小さくなるが，精度を一桁向上するためには，試行回数を 100 倍にしなければならず，より良い精度で解を得たい場合は多大な計算時間を要する．

第3章 フォールト検出時間を伴うシステムへの小修理の適用

3.1 はじめに

フォールト検出時間を伴うシステムは，その故障が直ちに顕在化しないような種類のものに限られる．ここでは，ミサイル等に代表されるワンショットシステムを取り上げる．

ワンショットシステムとは，一度しか使用できないようなシステムをいう．ミサイルや魚雷等の兵器類の他にも自動車のエアバッグ等が該当し，様々な分野で用いられているシステムといえる（図 3.1）．



図 3.1 ワンショットシステムの一例

ワンショットシステムは，使用されるまでの間その寿命のほとんどを倉庫等で過ごすことから，ストレージシステムとも呼ばれる．しかし，保管中であっても，システムを構成するアイテムの特性や温度・湿度などの保管条件，あるいはその他の理由により信頼度が低下し，故障が発生する可能性がある．

ミサイル等比較的大型で複雑なシステムでは，故障の有無を発見する

ため治具による計測や模擬信号による動作確認等の専門的な点検を適当な間隔で実施する必要がある．なぜなら，ワンショットシステムには救命や戦闘等の目的に用いられるシステムが多く，高い信頼性を保つことが極めて重要だからである．一般に，点検間隔が長いとフォールト検出時間が長期化し，稼働率の低下に繋がる．一方，点検間隔が短いと故障の早期発見には有効であるものの，点検費用がかさんでしまう．また，極端に短い間隔で点検を実施すると，点検にかかる時間によっては逆に稼働率を低下させる要因となる．そこで，ワンショットシステムでは適当な点検間隔を決定する問題が扱われてきた([6]-[10], [60]-[63]).

1章で述べたように，現代のシステムは複雑化が進んでおり，1回の故障発見までに重点を置いた解析ではシステムのライフサイクルコストを考える上で不十分である．実状を理論モデルに反映するため，本章ではワンショットシステムの故障が点検によって発見された際に，取替えではなく小修理が行われると仮定する．これにより，より現実的な解析を行うことができる．

各節でのモデルは表3.1に示すとおりである．3.2節では，単一のユニットからなるワンショットシステムに関する基本的な解析を行う．3.3節では，ワンショットシステムでよく用いられる，火薬等の点検での故障発見が困難であるユニットを考慮したモデルを提案する．3.4節では，マルチユニットモデルを提案する．3.5節では，非定期点検モデル，3.6節では取替時期管理方法に関する考察を述べる．最後に3.7節で本章の結論を述べる．

表3.1 提案モデルの概要

節	モデル	概 要
3.2	シングルユニット	単一のユニットからなるワンショットシステムに対し，故障発見の際に小修理， n 回目の故障発見時に取替えを行うモデル
3.3	2 ユニット	3.2節でのユニットに加え，点検でも故障が発見されないユニットを考慮したモデル
3.4	マルチユニット	複数の，点検でのみ故障が発見されるユニットから構成されるシステムに対するモデル
3.5	シングルユニット・非定期点検	シングルユニットモデルを定期点検から非定期点検に拡張したモデル
3.6	シングルユニット・定時取替え	シングルユニットモデルの取替えについて，定期的に行う方法と故障発見時に行う方法を比較する．

3.2 シングルユニットモデル

本節では，単一のユニットからなる，小修理を伴うワンショットシステムを考える．このモデルは最も単純であり，小修理を伴うワンショットシステムの中でも基礎的なモデルといえる．本節での議論をもとに，次節以降でより発展的なモデルを解析することができる．

システムは，故障の有無を確認するため定期的に点検される．点検において故障が発見されたならば小修理を行う．システムは， n 回目の故障が発見されたときに取替えられる．

保全にかかる時間を加味し，非定常ポアソン過程の結果を用いてシステムの平均アベイラビリティ及び平均コストレートを導出する．さらに，必要とされる平均アベイラビリティを満たしながら，平均コストレートが最小となる点検間隔及び取替えまでの故障回数を決定する．

3.2.1 記 号

本節では，以下の記号を用いる．

n ：取替えまでの故障回数

T ：点検間隔

X_l ： $l-1$ 回目の小修理後の稼働時間を表す確率変数（ここで， $l=1, 2, \dots, n$ であり， 0 回目の小修理とは，システムの運用を開始した時点またはシステムが取替えられた時点を指す．）

Y_l ： l 回目の故障が発生するまでのシステムの稼働時間を表す確率変数，つまり $Y_l = X_1 + X_2 + \dots + X_l$

$F^{(l)}(t)$ ： X_l の累積分布関数．つまり， $l-1$ 回目の小修理終了後のシステムの故障分布関数．ただし， $F(t) \equiv F^{(1)}(t)$

$G^{(l)}(t)$ ： Y_l の累積分布関数

$f(t)$ ：故障確率密度関数， $dF(t)/dt$

$h(t)$: 故障率関数

$H(t)$: 累積故障率関数

η : ワイブル分布の尺度パラメータ

β : ワイブル分布の形状パラメータ

$\mu^{(l)}$: $l-1$ 回目の小修理終了時点から, l 回目の故障までの平均稼働時間

$C_o(n, T)$: システムの取替え直後から次の取替えまでの間にかかるコスト
の期待値

$Q(n, T)$: システムの取替間隔の期待値

C_I : 1 回当たりの点検コスト

C_R : 1 回当たりの小修理コスト

C_P : 1 回当たりの取替コスト

m_I : 点検にかかる時間の期待値

m_R : 小修理にかかる時間の期待値

m_p : 取替えにかかる時間の期待値

$A(n, T)$: 時間間隔 $[0, \infty)$ での平均アベイラビリティ

α : 目標平均アベイラビリティ

$C(n, T)$: 時間間隔 $[0, \infty)$ での平均コストレート

3.2.2 仮 定

モデルの仮定は以下に示すとおりである. また, 図 3.2 はシステムの状態の時間経過の一例を示している.

- (1) システムは単一のユニットから構成されており, 正常または故障の 2 状態をとり得る. 故障は IFR の一般分布に従い発生する. つまり, $h(t)$ は単調増加関数である.
- (2) システムは, 直近の保全 (点検, 小修理及び取替え) が終了してから一定時間 T 後に点検される.
- (3) 故障は点検でのみ発見される. また, 故障は発生後の点検で必ず

発見される．

- (4) 故障が発見されたならば，直ちに小修理が実施される．ただし， n 回目の故障が発見されたときには取替えが行われ，システムは「新品同様」になる．
- (5) 点検，小修理及び取替えにかかる時間はそれぞれ平均 m_I, m_R 及び m_P の一般分布に従う．
- (6) 保全中及び故障中におけるシステムの故障率は変化しない．また，保全中に故障は発生しない．

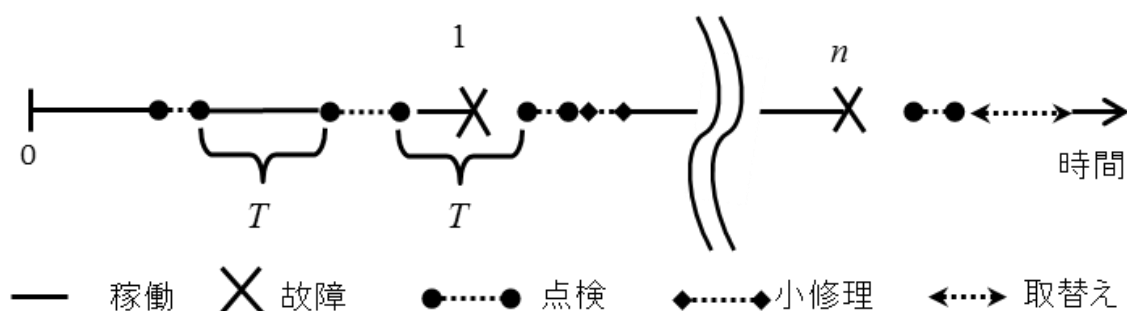


図 3.2 システムの状態の時間経過の一例

以上の仮定の下，平均アベイラビリティ $A(n, T) \geq \alpha$ を満たしつつ，平均コストレート $C(n, T)$ が最小となる最適な n 及び T を求める．

3.2.3 目的関数の導出

システムの時間間隔 $[0, \infty)$ での平均コストレート及び平均アベイラビリティを求める．システムが取替えが完了したときに，システムは新品同様に回復する．また，それぞれの取替間隔は独立で，かつ同一の分布に従うので，システムを取替えは再生過程に従うといえる．さらに，再生の度にとり替等のコストが発生すると考えると，システムの平均コストレートは取替えと次の取替えの間を一つのサイクルとした再生報酬過程により解析できる．

このサイクルを無限に繰り返すとき，再生報酬過程の議論（定理 2.4）より，単位時間当たりの平均コストは，1 サイクル当たりのコストの期待値を 1 サイクル当たりの時間の期待値で割ることで求められる．また，交代再生過程の議論（式(2.58)）より，平均アベイラビリティは，1 サイクルでの稼働時間の期待値を 1 サイクルの時間の期待値で割ることにより求められる．

よって以下から，1 サイクル当たりの平均稼働時間，1 サイクルの平均時間（平均取替間隔）及び 1 サイクル当たりの平均コストを求める．

3.2.3.1 小修理後の故障分布関数

保全中はシステムの故障率が変わらないので，システムの直近の取替えが行われた時間（取替作業が終了した時刻）を 0 とし，システムが保全中である時間を除いた時間軸を考える．小修理の前後で故障率は変化しないので，時刻 y で $l-1$ 回目の小修理を行ったという条件の下での小修理後のシステムの条件付き故障分布関数 $F^{(l)}(x|y)$ は次式で表される．

$$\begin{aligned} F^{(l)}(x|y) &= \Pr\{X_l \leq x | Y_{l-1} = y\} = 1 - \exp\left(-\int_y^{x+y} h(z)dz\right) \\ &= 1 - \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)} = \frac{F(x+y) - F(y)}{\bar{F}(y)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

このように，小修理を行った後の故障分布は，故障を経験した回数に関わらず，これまでに稼働した時間にのみ依存する．システムの $l-1$ 回目の小修理後の故障分布関数は，式(3.1)を積分することにより，次式で表される．

$$F^{(l)}(x) = \int_0^\infty \Pr(X_l \leq x | Y_{l-1} = y) dG^{(l-1)}(y) \quad (3.2)$$

ここで， $G^{(l)}(y)$ は l 回目の故障が発生するまでの総稼働時間が y 以下であ

る確率を表すが，小修理により故障率が変化しないことから，強度関数 $h(y)$ の非定常ポアソン過程により記述することができる．よって，式 (2.40) から $G^{(l)}(y)$ は

$$G^{(l)}(y) = \Pr(Y_l < y) = 1 - \sum_{j=0}^{l-1} \frac{[H(y)]^j}{j!} e^{-H(y)} \quad (3.3)$$

と表される．これは微分可能で，

$$\frac{d}{dy} G^{(l)}(y) = \frac{[H(y)]^{(l-1)}}{(l-1)!} h(y) e^{-H(y)} \quad (3.4)$$

であるから，式 (3.2) は，式 (3.1) とあわせて， $l \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} F^{(l)}(x) &= \int_0^\infty \frac{F(x+y) - F(y)}{\bar{F}(y)} \cdot \frac{[H(y)]^{l-2}}{(l-2)!} h(y) \bar{F}(y) dy \\ &= - \left[\frac{[H(y)]^{l-2}}{(l-2)!} \bar{F}(y) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{[H(y)]^{l-3}}{(l-3)!} f(y) dy - \int_0^\infty \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)} \cdot \frac{[H(y)]^{l-2}}{(l-2)!} f(y) dy \\ &= \dots = 1 - \int_0^\infty \bar{F}(x+y) \frac{[H(y)]^{l-2}}{(l-2)!} h(y) dy \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる．なお，式 (3.5) は文献 [23] 中에서도導かれている．

3.2.3.2 平均稼働時間

システムが取替えられるまでの平均稼働時間も同様に，式 (3.3) から得られる． $l-1$ 回目の小修理から l 回目の故障が発生するまでの間の平均稼働時間 $\mu^{(l)}$ は， l 回目の故障が発生する時刻の期待値と $l-1$ 回目の故障が発生する時刻の期待値の差であるので，

$$\mu^{(l)} = \int_0^\infty \bar{G}^{(l)}(x) dx - \int_0^\infty \bar{G}^{(l-1)}(x) dx = \int_0^\infty \frac{[H(x)]^{l-1}}{(l-1)!} e^{-H(x)} dx \quad (3.6)$$

となる． よって， 1 サイクル当たりの平均稼働時間は，

$$\sum_{l=1}^n \mu^{(l)} = \sum_{l=1}^n \int_0^{\infty} \frac{[H(x)]^{l-1}}{(l-1)!} e^{-H(x)} dx \quad (3.7)$$

となる． なお， システムの故障分布関数が尺度パラメータ η 及び形状パラメータ β のワイブル分布に従うとき， $H(x)=(x/\eta)^\beta$ を用いて式(3.6)及び(3.7)はそれぞれ式(3.8)及び(3.9)のように簡単化される．

$$\mu^{(l)} = \frac{\eta}{\beta} \frac{\Gamma(l+1/\beta-1)}{\Gamma(l)} \quad (3.8)$$

$$\sum_{l=1}^n \mu^{(l)} = \frac{\eta}{\beta} \sum_{l=1}^n \frac{\Gamma(l+1/\beta-1)}{\Gamma(l)} \quad (3.9)$$

3.2.3.3 平均取替間隔

まず， $n=1$ の場合を考える． これは， システムの故障が発見されたならば， 小修理を行わずに直ちに取替えを行うことを意味する． また， 保全にかかる時間は期待値を考慮すればよい． よって， 平均取替間隔は次式で表される．

$$\begin{aligned} Q(1, T) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \{k(T+m_l) + m_p\} dF(x) \\ &= m_p + \sum_{k=1}^{\infty} (T+m_l) k [\bar{F}\{(k-1)T\} - \bar{F}(kT)] \\ &= m_p + (T+m_l) \{\bar{F}(0) + \bar{F}(T) + \dots\} = m_p + (T+m_l) \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}(kT) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$n \geq 2$ のときは， $n-1$ 回目までの故障に対しては小修理を行い， n 回目の故障に対しては取替えを行うことを考慮すると， 式(3.10)と同様に，

$$\begin{aligned}
Q(n, T) &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \{k(T + m_l) + m_R\} dF^{(l)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \{k(T + m_l) + m_P\} dF^{(n)}(x) \\
&= (T + m_l) \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) + (n-1)m_R + m_P
\end{aligned} \tag{3.11}$$

となる．

3.2.3.4 平均コスト

取替えまでのコストの期待値は、3.2.3.3 節と同様に次式で計算できる．

$$\begin{aligned}
C_o(n, T) &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} [kC_l + C_R] dF^{(l)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} [kC_l + C_P] dF^{(n)}(x) \\
&= C_l \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) + (n-1)C_R + C_P
\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.3.5 目的関数

平均アベイラビリティは、式(3.7)を式(3.11)で除して、次式となる．

$$A(n, T) = \frac{\sum_{l=1}^n \mu^{(l)}}{Q(n, T)} = \frac{\sum_{l=1}^n \mu^{(l)}}{(T + m_l) \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) + (n-1)m_R + m_P} \tag{3.13}$$

平均コストレートは、式(3.12)を式(3.11)で除することにより、

$$C(n, T) = \frac{C_o(n, T)}{Q(n, T)} = \frac{C_l \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) + (n-1)C_R + C_P}{(T + m_l) \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) + (n-1)m_R + m_P} \tag{3.14}$$

と求められる．なお、保全にかかる時間が全て無視できる場合、式(3.13)及び(3.14)はそれぞれ式(3.15)及び(3.16)となる．

$$A(n, T) = \frac{\sum_{l=1}^n \mu^{(l)}}{T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT)} \quad (3.15)$$

$$C(n, T) = \frac{(n-1)C_R + C_P}{T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT)} + \frac{C_I}{T} \quad (3.16)$$

3.2.4 目的関数の挙動

本小節では、目的関数の T に関する数学的な挙動を調べ、現実的な条件で平均アベイラビリティは T に関して極大値を唯一もつ単峰関数となること及び平均コストレートがある部分で単調減少することを明らかにする。

まず、 $T \rightarrow \infty$ のとき、式(3.13)の平均アベイラビリティは次式となる。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A(n, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l=1}^n \mu^{(l)}}{(T + m_I) \cdot n + (n-1)m_R + m_P} = 0 \quad (3.17)$$

また、 $m_I > 0$ のとき $T \rightarrow 0$ とすると

$$\lim_{T \rightarrow 0} A(n, T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{\sum_{l=1}^n \mu^{(l)}}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT)}}{T + m_I + \frac{(n-1)m_R + m_P}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT)}} = 0 \quad (3.18)$$

が成り立つ。式(3.17)及び(3.18)、並びに平均アベイラビリティは点検間隔 T に関する連続関数であることから、平均アベイラビリティは $m_I > 0$

のとき少なくとも1点で極大値をもつと言える．実際，故障がワイブル分布に従うとし，様々なパラメータで検証した結果，現実的な条件では極大値を唯一もつ関数となっていることが分かった(付録A参照)．以後，極大値をとる点検間隔 T^* が唯一存在するとして議論を進める．

平均コストレートの極限は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C(n, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_I \cdot n + (n-1)C_R + C_P}{(T + m_I) \cdot n + (n-1)m_R + m_P} = 0 \quad (3.19)$$

であり， $m_I > 0$ のときは

$$\lim_{T \rightarrow 0} C(n, T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{C_I + \frac{(n-1)C_R + C_P}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT)}}{(T + m_I) + \frac{(n-1)m_R + m_P}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT)}} = \frac{C_I}{m_I} \quad (3.20)$$

が成り立つ．また，コストレートの T に関する偏微分は

$$\frac{\partial C(n, T)}{\partial T} = \frac{C_I P'(T) Q(n, T) - \{C_I P(T) + (n-1)C_R + C_P\} \partial Q(n, T) / \partial T}{\{Q(n, T)\}^2} \quad (3.21)$$

となる．ただし，

$$P(T) \equiv \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) \quad (3.22)$$

である． $P'(T) < 0$ より， $C(n, T)$ は $T > T^*$ のとき単調減少する．一方， $T < T^*$ での挙動は一意に定まらないが，単調減少とはならない場合もある（録B参照）．

以上の議論をまとめると，点検間隔に関する目的関数について既知の情報は図 3.3 で表される．ただし， $\max A(n, T) > \alpha$ であり， $A(n, T) = \alpha$ を満たす点検間隔を $T_1, T_2 (T_1 < T_2)$ としている．なお，図中 $T < T^*$ でのコストレー

トの挙動は一意に定まらないため未記入である．

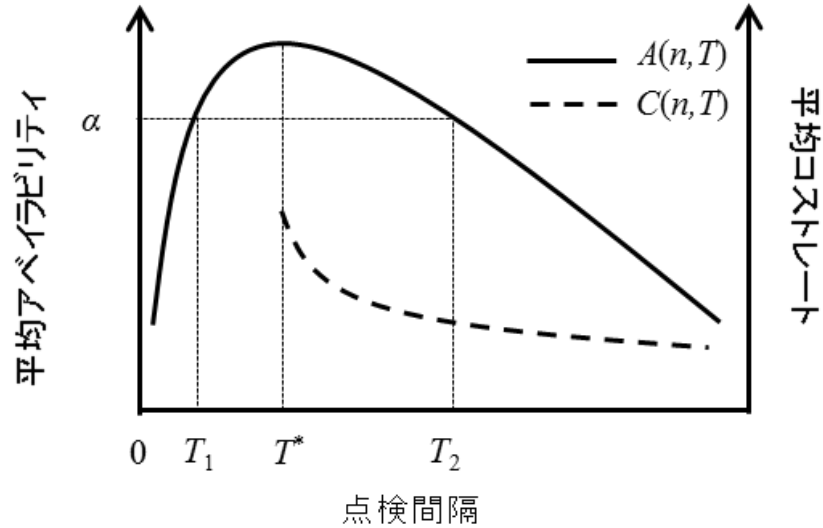


図 3.3 目的関数の挙動($m_l > 0$)

3.2.5 アルゴリズム

前小節の議論から， n が既知のとき点検間隔の最適解を求めるアルゴリズムを以下に提案する．ただし， $:=$ は代入操作を意味する．アベイラビリティは単峰なので，その極値は黄金分割法を用いて求めることができる．

ステップ 1：黄金分割法で T^* を求める．

ステップ 2：もし $A(n, T^*) < \alpha$ ならば最適解は存在しない．そうでなければ $T_1, T_2, C(n, T_2)$ を求める．

ステップ 3：区間 $[T_1, T^*]$ での最小コストレートを求め， $C(n, T_2)$ と比較する．より小さい方が最適コストレートであり，それを与える T が最適点検間隔である．

上のアルゴリズムを $n=1$ から順に逐次実行することにより， n の最適

解を求めることができる．ただし， n が変化したとき最適コストレートが単峰ないし単調増加になることは多くの場合に成り立つことが分かっているものの，未証明である．

3.2.6 数値例

システムは目標平均アベイラビリティ $\alpha=0.9$ 以上を保持する必要があるとし，数値例を示す．まず，保全にかかる時間を無視できる場合についての計算結果を示し，次に無視できない場合について示す．パラメータは表 3.2 に示すとおりである．

表 3.2 パラメータ

分布関数	尺度パラメータ (η)	形状パラメータ (β)	C_I	C_R	C_P
ワイブル	3000	2.0	10	50	400

$n=3$ 及び $n=4$ のときの点検間隔に対する平均アベイラビリティ（式 (3.15)）及び平均コストレート（式 (3.16)）の変化を図 3.4 に示す．

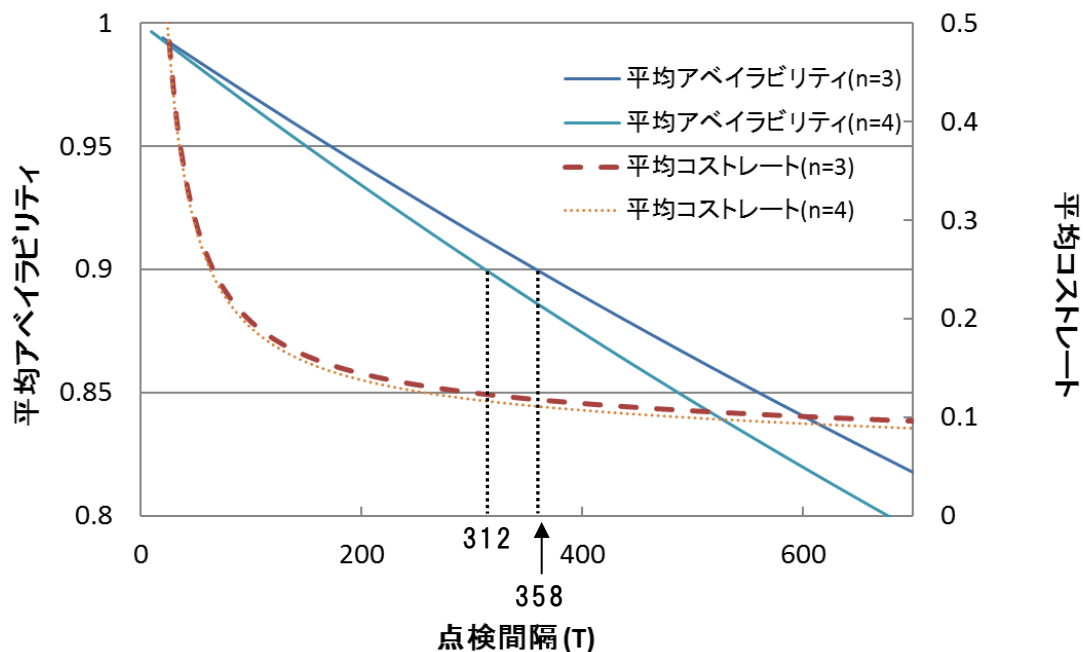


図 3.4 保全時間が無視できる場合の目的関数の挙動($n=3,4$)

図 3.4 から，平均アベイラビリティは点検間隔が増加するとともに直線的に減少している様子が確認できる．これは， $m_I=0$ のため図 3.3 で示す性質が成り立たないためである．平均コストレートは T が小さくなるほど傾きが急になっている．これは，式(3.16)の右辺第 2 項，即ち単位時間当たりの点検コストが増大するためと考えられる．また， $n=4$ のとき，最適点検間隔は 312 で，平均コストレートは $C(4,312)=0.1172$ となっている．これは， $n=3$ 及び $n=5$ のときの最適解 $C(3,358)=0.1182$ 及び $C(5,280)=0.1183$ より安く，全体の最適解となっている．

次に，保全にかかる時間を考慮した数値例を示す．パラメータを $m_I=3$, $m_R=6$, $m_P=8$ とする． $n=2, 3$ のときの平均アベイラビリティ及び平均コストレートの点検間隔による変化を図 3.5 に示す．

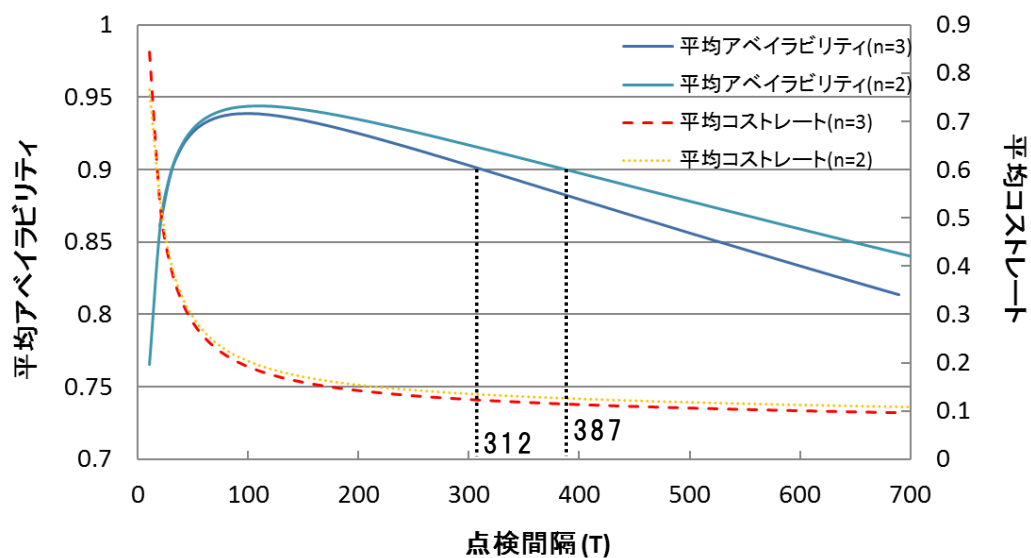


図 3.5 保全時間を考慮した場合の計算結果 ($n=2,3$)

$n=2, 3$ と固定したときの最適解は図 3.5 からそれぞれ $C(2,387)=0.1271$, $C(3,312)=0.1219$ である．また， $n=4$ のときの最適解は $C(4,266)=0.1222$ となり， $C(3,312)=0.1219$ が全体の最適解となっている．なお， $n=3$ のとき平均アベイラビリティは $T=99$ で最大値 0.9387 をとり，このときの平均コストレートは $C(3,99)=0.1918$ となった．

3.2.7 まとめ

本節では，単一ユニットからなるワンショットシステムが，故障発見の際に小修理が行われるモデルを提案し，平均コストレート及び平均アベイラビリティを導出した．また，要求される平均アベイラビリティを満たしつつ，平均コストレートが最小となる点検間隔の最適値を決定した．

本モデルを基本とし，次節以降でより発展的かつ現実的なモデルを提案し，解析する．

3.3 2 ユニットモデル

本節では，2 ユニットからなる，小修理を伴うワンショットシステムを考える．前節の解析方法を応用し，2 つのユニットが直列に接続されている場合について考える．

ユニット 1 は前節で取り上げられたユニットと同じ性質をもつ．即ち，点検でのみ故障が発見されるユニットである．しかし，実際のワンショットシステムには，それとは性質を異にするユニットも含まれている．例えば，システムを使用しない限り故障しているかどうか分からない火薬等のユニットが挙げられる[61]．このようなユニットの故障の有無を確認することは困難であるため，取替えを前提とした保全計画が立てられる場合が多い．

点検でも故障が発見できないユニットをユニット 2 とし，ユニット 2 の取替えに関する方策を 2 種類提案する．一つはユニット 1 の保全と連動した時期に取替えを行う同時取替方策であり，もう一つはユニット 1 の保全とは独立に取替えを行う独立取替方策である．それぞれの方策について，システム全体としての平均アベイラビリティ及び平均コストレートを導出し，ある平均アベイラビリティを満たしつつ，平均コストレートを最小化する保全方策を決定する．また，得られた最適解を比較することにより，どちらの方策がより効率的かという点について検討する．

3.3.1 記 号

使用する記号は 3.2.1 節に準じる他，以下のとおりとする．なお，下付け文字 i ($i=1,2$) でユニット i を， s でシステムを表す．例えば， $H_1(t)$ はユニット 1 の累積故障率関数を表す．

N ：同時取替方策における，ユニット 2 の取替えまでのユニット 1 の点検回数

T : 同時取替方策における, ユニット 1 の点検間隔
 T_1 : 独立取替方策における, ユニット 1 の点検間隔
 T_2 : 独立取替方策における, ユニット 2 の取替間隔
 $A_{Ss}(N, T)$: 同時取替方策における, システムの平均アベイラビリティ
 $C_{Ss}(N, T)$: 同時取替方策における, システムの平均コストレート
 $A_{Is}(T_1, T_2)$: 独立取替方策における, システムの平均アベイラビリティ
 $C_{Is}(T_1, T_2)$: 独立取替方策における, システムの平均コストレート
 Z_I : ユニット 1 の点検にかかる時間を表す確率変数
 Z_R : ユニット 1 の小修理にかかる時間を表す確率変数
 Z_{Pi} : ユニット i の取替えにかかる時間を表す確率変数
 m_I : Z_I の期待値
 m_R : Z_R の期待値
 m_{pi} : Z_{pi} の期待値
 τ : システム全体の再生間隔の期待値
 C_o : システムの再生間隔当たりの平均コスト

3.3.2 仮 定

以下に, 本節の仮定を示す.

- (1) システムはユニット 1 及びユニット 2 から構成されており, 機能的に直列に接続されている.
- (2) ユニット 1 は, 直近の自身の保全 (点検, 小修理及び取替え) が終了してから一定時間後に点検される. 各ユニットの故障は一般分布に従い, ユニット 1 は IFR である.
- (3) 2 つのユニットの故障は互いに独立に発生する.
- (4) ユニット 1 の故障は定期的に行われる点検で必ず発見される.
- (5) ユニット 1 の故障が発見されたならば, 直ちに小修理が実施される.

- (6) ユニット1とユニット2の保全は同時に行うことができ、保全の完了は互いに独立である。
- (7) ユニット1は n 回目の故障が発見されたときに取替えられ、「新品同様」になる。 n は既知である。
- (8) ユニット2の故障は点検で発見できない。そのため、定期的に取り替えられ、「新品同様」となる。
- (9) ユニットの保全中及び故障中の故障率は変化しない。また、保全中に故障は発生しない。

システムの平均アベイラビリティが α 以上を満たしつつ、平均コストレートが最小となる解を最適解とする。

基本的にユニット2は定期的に取り替えられるが、その取替方策について2つの方法を提案する。

(1) 同時取替方策

本方策では、ユニット2の取替えを、ユニット1を点検する時期に合わせる。よって、ユニット2の取替間隔をユニット1の点検間隔の整数倍の間隔にしか設定することができないため、ユニット2固有の最適取替時期に取替えを行うことは難しい。しかし、両ユニットの保全を同時に行うことにより、保全時間を短縮することができるので、システム全体としてのアベイラビリティ向上に寄与すると考えられる。

(2) 独立取替方策

本方策では、ユニット2の取替えをユニット1とは全く独立に行う。ユニット1とユニット2の保全を独立に行うことにより、それぞれのユニットの故障分布に応じて最適な時期に保全を行うことができる。しかし、どちらかのユニットに保全を行っている間はシステムが非稼働となり、全体の保全時間が長くなる恐れがある。

以下で，それぞれの方策について論じる．

3.3.3 同時取替方策

以下で同時取替方策の詳細について説明する．また，図 3.6 に同時取替方策の時間経過の一例を示す．

- (ア) ユニット 2 は，直近の取替えが行われてから， N 回目の（ユニット 1）点検またはユニット 1 の故障が発見されたときに取替えられる．
- (イ) 保全時間は，通常稼働時間に比べて十分短いため，片方のユニットが保全中の，もう片方のユニットの故障率の変化は無視できる．また，その期間に新たな故障が発生することはない．

ここでは，ユニット 2 の取替えは容易であるため，定期的な取替えに加え，ユニット 1 の故障発見時にも予防的な取替えを行うと仮定する．

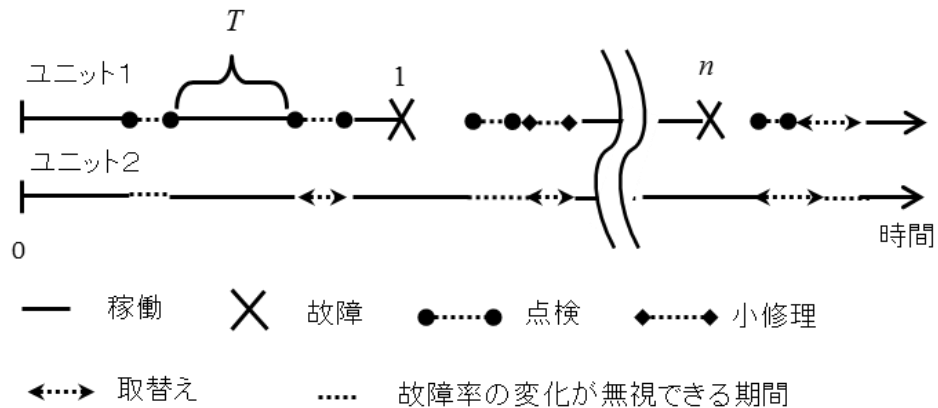


図 3.6 同時取替方策の時間経過の一例($N=2$)

ここから，モデルの平均アベイラビリティ及び平均コストレートを N 及び T の関数として導出する．ユニット 1 が取替えられるときは，ユニット 1 の n 回目の故障が発見されたときなので，同時にユニット 2 も取

替えられる．つまりユニット 1 の取替えにより，システム全体としても「新品同様」となる．そこで，ユニット 1 の取替えから次の取替えまでを 1 サイクルとして前節同様に解析を行う．

ユニット 1 の直近の小修理（または取替え）から，どちらかのユニットが保全中の時間を除いた時間を t で表すと，ユニット 1 の $l-1$ 回目の小修理後のシステムの信頼度関数は，次式で表される．

$$\bar{F}_s(t) = \bar{F}_1^{(l)}(t) \cdot \bar{F}_2(t - (u-1)NT) \quad ((u-1)NT \leq t \leq uNT, u=1,2,\dots) \quad (3.23)$$

これを用いて，1 サイクル当たりのシステムの平均稼働時間は次式のよう求められる．

$$\sum_{l=1}^n \sum_{u=1}^{\infty} \int_{(u-1)NT}^{uNT} \bar{F}_1^{(l)}(t) \cdot \bar{F}_2(t - (u-1)NT) dt = \sum_{l=1}^n \left\{ \int_0^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(w) \cdot \bar{F}_2\left(w - NT \left\lfloor \frac{w}{NT} \right\rfloor\right) dw \right\} \quad (3.24)$$

次に，1 サイクル当たりの平均期間を求めるため，保全にかかる時間を求める．実施される可能性のある保全の組合せは，次の 3 種類がある（図 3.7）．

- (A) ユニット 1 の点検のみ
- (B) ユニット 1 の点検及びユニット 2 の取替えのみ
- (C) ユニット 1 の点検及び小修理（または取替え）並びにユニット 2 の取替え

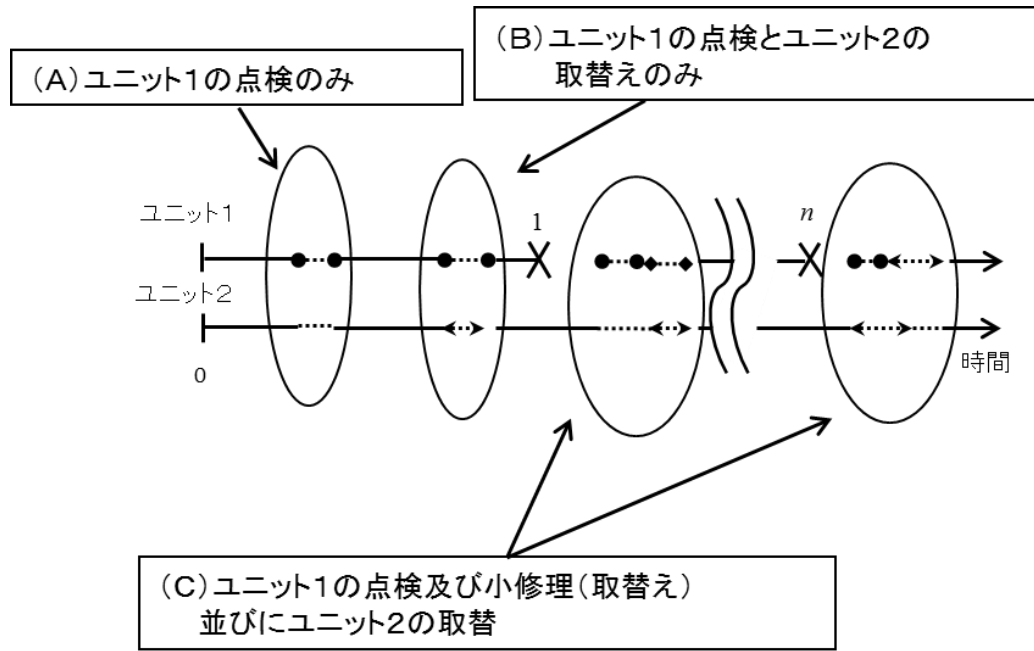


図 3.7 実施される保全の組合せ

それぞれの場合における保全時間の期待値を求める．

まず，（A）の場合について考える．この場合，ユニット2は取替えられないので，1サイクル当たりに（A）が起こる回数の期待値は，1サイクル当たりの平均点検回数とユニット2の平均取替回数の差である．ここで，1サイクル当たりのユニット2の平均取替回数は，

$$\sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^{\infty} \int_{(s-1)NT}^{sNT} s dF_1^{(l)}(x) = \sum_{l=1}^n \sum_{s=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(sNT) \quad (3.25)$$

であるので，（A）の場合の保全時間の期待値は次式となる．

$$\sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT) - \sum_{s=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(sNT) \right\} m_l \quad (3.26)$$

次に，（B）の組合せで保全が行われるとき，点検で故障が発見されていない．なぜなら，故障が発見された場合は小修理または取替えを行うため，（C）に分類されるからである．よって，この場合の保全時間の期

待値は次式となる．

$$\left\{ \sum_{l=1}^n \sum_{s=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(sNT) - n \right\} E[\max\{Z_l, Z_{P2}\}] \quad (3.27)$$

つまり，(B)が生起する平均回数に，点検とユニット2の取替えのうち，長いほうの時間の期待値をかければよい．

最後に (C) の場合を考える．これは点検でユニット1の故障が発見された場合を意味するが，この点検が $l-1$ 回目の小修理から N の整数倍回目である (図 3.7(C)右矢印) か否か (図 3.7(C)左矢印) に分類できる． N の整数倍回目のケースでは，ユニット2の取替えが事前に計画されており，そうでないケースではユニット1の故障が発見された結果としてユニット2の取替えが決定されるという相違がある．そこで，ユニット1の l 回目の故障が $l-1$ 回目の小修理から N の整数倍回目の点検で発見される確率を π_l とすると，

$$\pi_l = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \bar{F}_1^{(l)}((sN-1)T) - \bar{F}_1^{(l)}(sNT) \right\} \quad (3.28)$$

と表される．よって，(C)の場合の保全時間の期待値は式(3.29)となる．

$$\sum_{l=1}^n \left[\pi_l E[\max(Z_l + L_l, Z_{P2})] + (1 - \pi_l) \{m_l + E[\max(L_l, Z_{P2})]\} \right] \quad (3.29)$$

ここで，

$$L_l = \begin{cases} Z_R & (l < n) \\ Z_{P1} & (l = n) \end{cases}$$

である．以上より，保全時間を含めた1サイクルの平均間隔 τ は，

$$\begin{aligned}
\tau = & T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT) + \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT) - \sum_{s=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(sNT) \right\} m_l \\
& + \left\{ \sum_{l=1}^n \sum_{s=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(sNT) - n \right\} E[\max\{Z_l, Z_{P_2}\}] \\
& + \sum_{l=1}^n [\pi_l E[\max(Z_l + L_l, Z_{P_2})] + (1 - \pi_l) \{m_l + E[\max(L_l, Z_{P_2})]\}] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

で求められる．なお，式(3.30)の右辺第 1 項は，保全が行われている以外の時間の期待値を表している．

最後に，1 サイクル当たりの平均コスト C_o は，式(3.12)にユニット 2 の取替コストを加えればよいので，次式となる．

$$C_o = C_l \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT) + (n-1)C_R + C_{P_1} + C_{P_2} \sum_{l=1}^n \sum_{s=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(sNT) \quad (3.31)$$

以上より，システムの平均アベイラビリティ及び平均コストレートはそれぞれ式(3.32)及び(3.33)となる．

$$A_{Ss}(N, T) = \frac{\sum_{l=1}^n \left\{ \int_0^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(w) \cdot \bar{F}_2(w - NT \lfloor w/(NT) \rfloor) dw \right\}}{\tau} \quad (3.32)$$

$$C_{Ss}(N, T) = \frac{C_l \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT) + C_{P_2} \sum_{l=1}^n \sum_{s=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(sNT) + (n-1)C_R + C_{P_1}}{\tau} \quad (3.33)$$

$m_l > 0$ のとき

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A_{Ss}(N, T) = \lim_{T \rightarrow 0} A_{Ss}(N, T) = 0 \quad (3.34)$$

より，システムの平均アベイラビリティは少なくとも 1 点で最大値をと

る．

保全にかかる時間を見無視することができるとき，平均アベイラビリティ及び平均コストレートはそれぞれ次の式に書き換えられる．

$$A_{ss}(N, T) = \frac{\sum_{l=1}^n \int_0^{\infty} \bar{F}_s^{(l)}(w) dw}{T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT)} \quad (3.35)$$

$$C_{ss}(N, T) = \frac{(n-1)C_R + C_{P1} + C_{P2} \sum_{l=1}^n \sum_{s=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(sNT)}{T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT)} + \frac{C_I}{T} \quad (3.36)$$

3.3.4 独立取替方策

以下で独立取替方策の詳細について説明する．また，図 3.8 は独立取替方策の時間経過の一例を示している．

(ア) ユニット 1 は，直近の保全終了から時間 T_1 後に点検される．

(イ) ユニット 2 は，直近の取替え終了から時間 T_2 後に取替えられる．

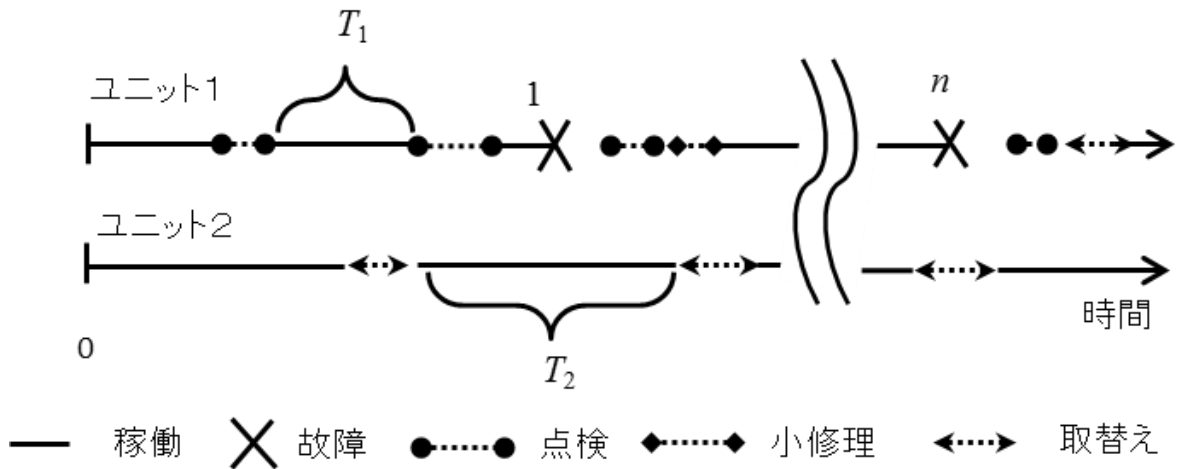


図 3.8 独立取替方策の時間経過の一例

ここで，ユニット 2 単独の平均アベイラビリティは，式(3.37)で表される．

$$A_2(T_2) = \frac{\int_0^{T_2} \bar{F}_2(w) dw}{T_2 + m_{p2}} \quad (3.37)$$

2つのユニットの稼働・非稼働は独立に決まるから，システムの平均アベイラビリティは，式(3.13)及び(3.37)から

$$A_{Is}(T_1, T_2) = A_1(n, T_1) \times A_2(T_2) = \frac{\int_0^{T_2} \bar{F}_2(w) dw \sum_{l=1}^n \mu_1^{(l)}}{(T_2 + m_{p2}) \left\{ (T_1 + m_l) \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT_1) + (n-1)m_R + m_{p1} \right\}} \quad (3.38)$$

と表せる．平均コストレートについても同様に，式(3.14)を用いて

$$C_{Is}(T_1, T_2) = \frac{C_I \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT_1) + (n-1)C_R + C_{p1}}{(T_1 + m_l) \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT_1) + (n-1)m_R + m_{p1}} + \frac{C_{p2}}{T_2 + m_{p2}} \quad (3.39)$$

となる． $m_l > 0$ のとき，平均アベイラビリティは，

$$\lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} A_{Is}(T_1, T_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow 0} A_{Is}(T_1, T_2) = 0 \quad (3.40)$$

が成り立ち，さらに各ユニットの独立性から，

$$\max\{A_{Is}(T_1, T_2)\} = \max\{A_1\} \cdot \max\{A_2\} \quad (3.41)$$

なので，少なくとも1点で最大値をとり，最大値を与える T_1 及び T_2 はそれぞれのユニットの故障分布にのみ依存する．

保全にかかる時間が無視できる場合, 式(3.38)及び式(3.39)はそれぞれ,

$$A_{Is}(T_1, T_2) = \frac{\int_0^{T_2} \bar{F}_2(w) dw \sum_{l=1}^n \mu_1^{(l)}}{T_1 T_2 \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_1^{(l)}(kT_1)} \quad (3.42)$$

$$C_{Is}(T_1, T_2) = \frac{(n-1)C_R + C_{P1}}{T_1 \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} T_1(kT_1)} + \frac{C_I}{T_1} + \frac{C_{P2}}{T_2} \quad (3.43)$$

となる.

3.3.5 数値例

システムは 0.9 以上の平均アベイラビリティを保持する必要があると仮定し, 数値例を示す. まず, 保全にかかる時間が無視できる場合において, 同時取替方策及び独立取替方策の両方策の計算結果を示し, 次に保全にかかる時間が無視できない場合の 2 つの方策の計算結果を示す. 各ユニットのパラメータは表 3.3 に示すとおりである. 表 3.4 に, 保全時間が無視できる場合の各方策での最適解を示す.

表 3.3 各ユニットのパラメータ

ユニット	分布関数	尺度パラメータ	形状パラメータ	取替えコスト	C_R	C_I	n
1	ワイブル	3000	2.0	400	50	10	3
2	ワイブル	1700	2.5	40			

表 3.4 保全時間が無視できる場合の最適解

同時取替方策	T	N	$C_{ss}(N, T)$
	249	3	0.1949
独立取替方策	T_1	T_2	$C_{ls}(T_1, T_2)$
	243	724	0.1896

2つの方策の最適解を比較すると，独立取替方策の方が，少ないコストで必要とされる平均アベイラビリティを実現できることがわかる．これは，独立取替方策が，同時取替方策に比べユニット2の取替間隔をより細かく設定できるからと考えられる．

同時取替方策の計算結果を図 3.9 に示す．ただし， N の最適値は 3 であったが，ここでは比較のため， $N=1$ と $N=3$ の場合の計算結果を示している．

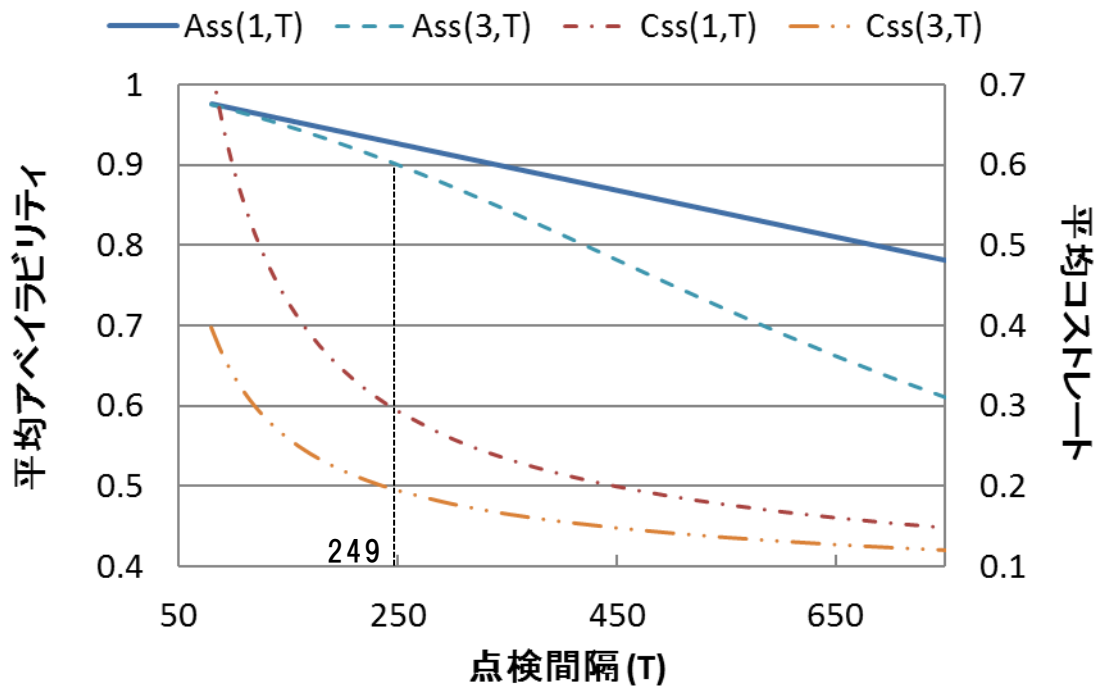


図 3.9 保全時間が無視できる場合の同時取替方策の目的関数の挙動

図 3.9 から， $N=1$ のコストレートは $N=3$ のときより高くなっているこ

とが確認できる．

次に，保全にかかる時間を考慮した場合の計算結果を示す．保全にかかる時間は表 3.5 のとおりである．ここでは，全て指数分布に従うものと仮定している．

表 3.5 平均保全時間

点検	小修理	取替え	
		ユニット 1	ユニット 2
3	6	8	5

各方策における最適解は，表 3.6 に示すとおりである．

表 3.6 保全時間を考慮した場合の最適解

同時取替方策	T	N	C_{Ss}
	208	3	0.2096
独立取替方策	T_1	T_2	C_{Is}
	188	610	0.2102

この場合は，独立取替方策よりも同時取替方策の方が，わずかに少ないコストで目標アベイラビリティを満たしていることがわかる．これは，同時取替方策ではユニット 1 とユニット 2 の保全を同時に行うことができ，保全によるダウンタイムを最小限に抑えることができるからである．よって，保全時間が長くなればなるほど，同時取替方策の方が有利になると予想される．当然ではあるが，表 3.6 の結果はいずれも，保全時間が無視できる表 3.4 の結果よりもコストが高く，また，点検及び取替えの期間もより短くなっている．次に，図 3.10 に同時取替方策での平均アベイラビリティ及び平均コストレートの計算結果を示す．ここでも $N=1$ の場合を併記している．

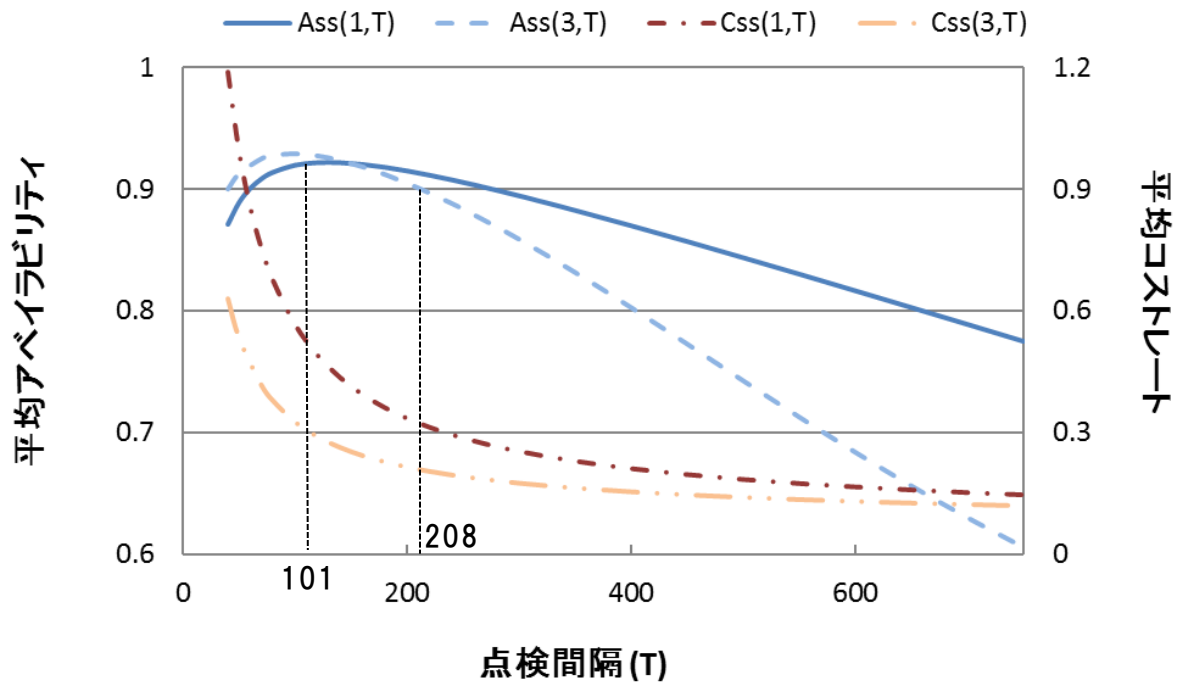


図 3.10 保全時間を考慮した場合の同時取替方策の計算結果

図から，同時取替方策における平均アベイラビリティの最大値は， $A_{ss}(3,101)=0.9261$ で，このときの平均コストレートは $C_{ss}(3,101)=0.3222$ となる．

図 3.11 及び 3.12 に，独立取替方策での平均アベイラビリティ及び平均コストレートの計算結果をそれぞれ示す．

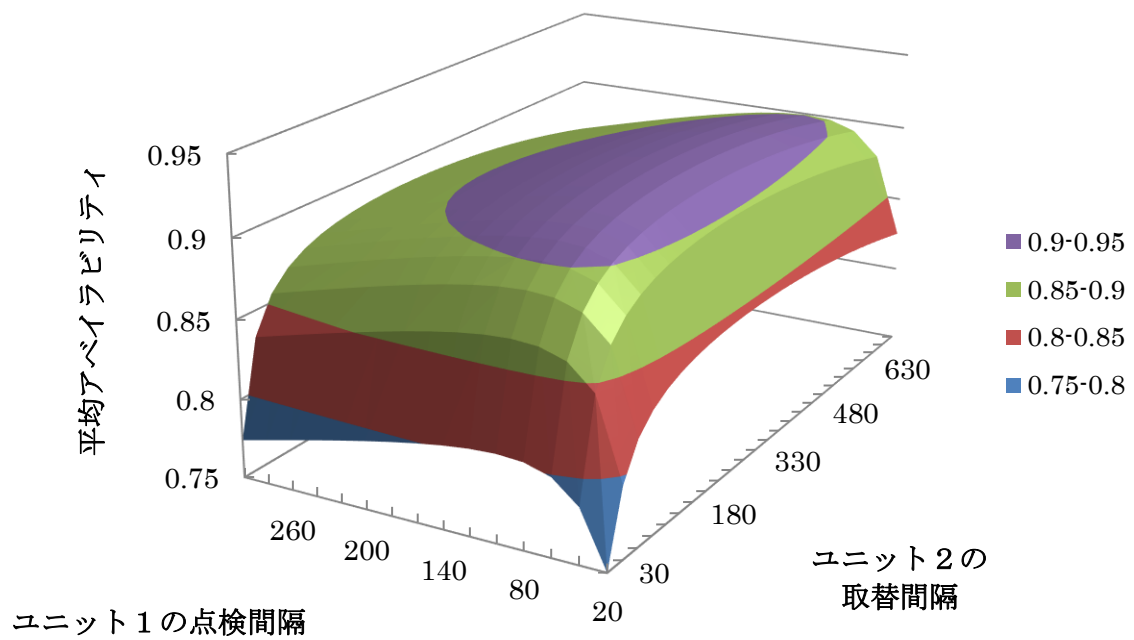


図 3.11 保全時間を考慮した場合の
独立点検方策の平均アベイラビリティ

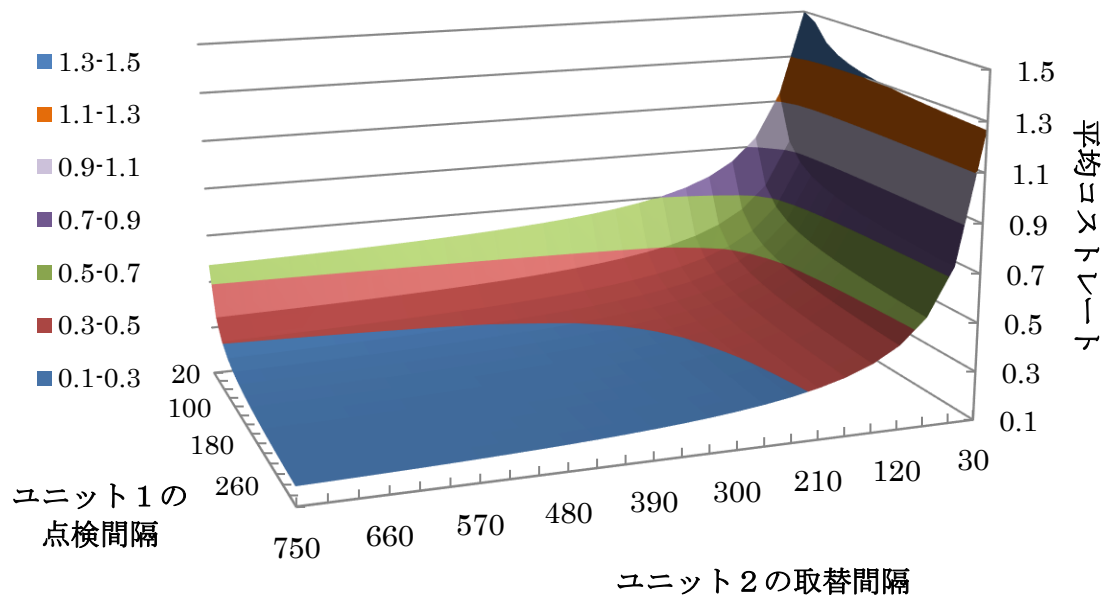


図 3.12 保全時間を考慮した場合の独立取替方策の平均コストレート

図 3.11 から，独立取替方策における平均アベイラビリティの最大値は $A_{Is}(99,354)=0.9204$ であり，このとき $C_{Is}(99,354)=0.3032$ であることがわかる．また，図 3.12 からは，平均コストレートが T_1, T_2 どちらに対しても単調に減少していく様子が確認できる．

最後に，いくつかの平均保全時間の組み合わせに対する各方策での最適解と最適コストレートの比を表 3.7 に示す．ただし，表中の C_{Ss}^* と C_{Is}^* はそれぞれ同時取替方策，独立取替方策の最適コストレートを意味する．

表 3.7 保全時間の組み合わせによる最適解とコストの比

m_I	m_R	m_{P1}	m_{P2}	同時取替方策			独立取替方策			最適コストレート比 (C_{Ss}^*/C_{Is}^*)
				N	T	C_{Ss}^*	T_1	T_2	C_{Is}^*	
0	0	0	0	3	249	0.1949	243	724	0.1896	1.028
2	5	6	4	3	221	0.2043	209	641	0.2024	1.009
3	5	6	4	3	212	0.2080	196	618	0.2073	1.003
3	6	8	5	3	208	0.2096	188	610	0.2102	0.997
4	6	9	6	3	193	0.2169	168	554	0.2222	0.976

表 3.7 から，保全時間が長くなるほど各方策での最適保全間隔は短くなり，同時取替方策が有利になっていることが確認できる．

3.3.6 まとめ

本節では，3.2 節で解析したシングルユニットモデルを拡張し，2 ユニットからなるワンショットシステムの保全方策を提案した．ユニット 1 の故障は点検で発見されるのに対し，ユニット 2 の故障はどのような点検でも発見されないと仮定した．これは，現実のワンショットシステムに含まれる化学的なユニットをモデル化したものである．

定期的に点検されるユニット 1 に対し，ユニット 2 は定期的に取り替えられると仮定し，ユニット 2 の取替方策を 2 種類提案した．ユニット 1 の点検と同時に取替えを行う同時取替方策と，点検と取替えをそれぞれ

独立に行う独立取替方策である．

数値例にて各方策の最適解を比較した結果，保全にかかる時間が長いほど同時取替方策の方が有利であることを確認することができた．一方，独立取替方策には，ユニット 1 の点検とユニット 2 の取替時期がある程度近くとも，同時には保全を行わないため，全体の保全時間が長くなるという弱点がある．これを補うため，ユニット 2 の取替間隔を固有の最適値に設定しつつ，取替時期がユニット 1 の点検とある程度近いときには，同時に保全を行うという方策が考えられる．このような方策を適用すれば，本節のどちらの方策よりも効率的な運用ができる可能性がある．この方策についての研究は今後の課題として残る．

3.4 マルチユニットモデル

本節では，3.2 節での解析方法を応用し，複数の異なるユニットが直列に接続されているワンショットシステムを考える．ここでは，前節のように特性の異なるユニットは扱わず，全てのユニットの故障は点検で必ず発見されると仮定する．また，故障が発見されたユニットは直ちに小修理される．全体として n 回目のユニット故障が発見されたときに，システム内のユニットは全て取替えられると仮定し，システムの平均コストレートが最小となる保全方策を決定する．

このようなシステムの信頼度を時間に依存した形で解析することは容易でなく，これまでモンテカルロ・シミュレーションによる解析[62][63]や時間非依存の信頼度解析[64]が研究されてきた．本節では，2 種類の近似手法を提案し，解析を行う．それぞれの結果をモンテカルロ・シミュレーションの結果と比較することで，近似の精度を評価する．

なお，本節ではアンアベイラビリティをリスク（コスト）で評価することにより，全体のコストレートを最小化する問題を考える．

3.4.1 記 号

本節で用いる記号は 3.2.1 節に準じる他以下のとおりである．ただし必要なときは，下付け文字 i でユニット i を， s でシステムを表す．

m ：システムを構成するユニット数

τ ：システムの平均取替間隔

C_I ：システム全体の 1 回当たりの点検コスト

C_{Ri} ：ユニット i ($i=1, 2, \dots, m$) の 1 回当たりの小修理コスト

C_D ：単位時間当たりのシステムのダウンコスト

C_P ：システム全体の 1 回当たりの取替コスト

C_M ：システムを取替え直後から次の取替えまでの間にかかる全小修理コ

3.4.2 仮 定

モデルの仮定は 3.2.2 節に準じる他，以下のとおりである．また，図 3.13 はシステムの状態の時間経過の一例を示している．

- (1) システムは m 個のユニットの直列接続により構成されている，各ユニットの故障は非同一の一般分布に従う．システム全体としての故障率は IFR である．
- (2) 各ユニットは，直近の点検から一定時間 T 後に同時に点検される．
- (3) 保全作業にかかる時間は全て無視できる．
- (4) システムが非稼働状態であることにより，リスクが発生する．リスクは通常，システムが使用できない確率と使用できなかったことによる損失コストの積で与えられるが，本研究では簡単のため，単位時間当たり C_D のダウンコストが発生するものとする（付録 C 参照）
- (5) システムは前回の取替えから合計で n 回目の故障が発見されたときに，全ユニットが取替えられ，「新品同様」になる．

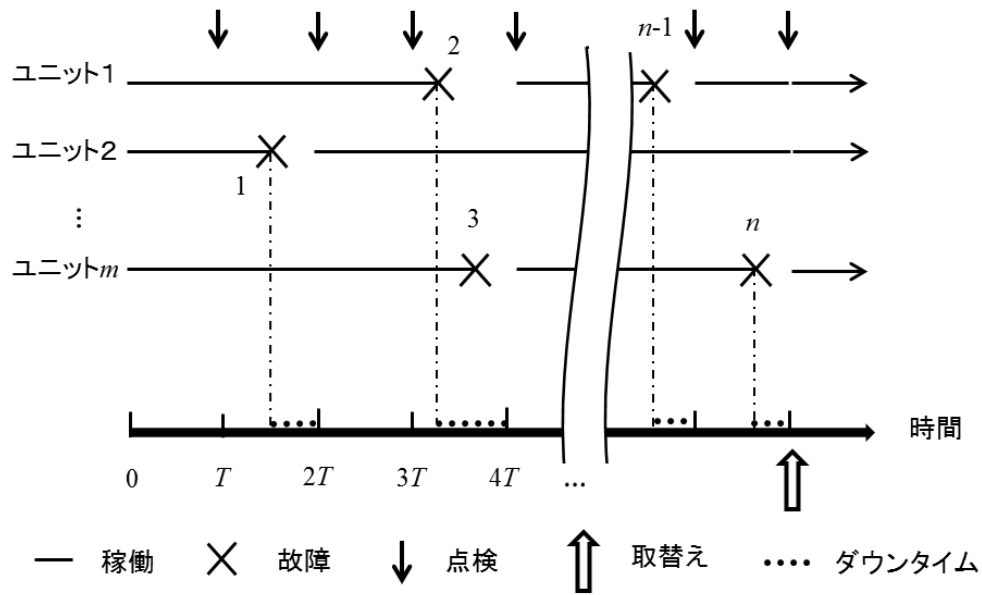


図 3.13 システムの状態の時間経過の一例

なお，図 3.13 における時刻 $4T$ での点検のように，点検で複数の故障が発見され，小修理された場合については，それぞれについて小修理回数を数える．

本節での仮定は前節までのものと若干異なる．まず，前節までは保全にかかる時間を考慮したが，本節では問題を簡単化するため無視できると仮定する．また，前節まではある平均アベイラビリティを満たしつつ，平均コストレートの最小化を目指したが，本節ではシステムのダウン状態である期間にダウンコストが発生すると仮定し，ダウンコストを含めた合計の平均コストレートを最小化する問題を考える．

3.4.3 解 析

システムは n 回目の故障が発見された時点で再生すると考えることができる．よって，取替えから次の取替えまでの間を 1 サイクルとして解析する．まず $n=1$ の場合について解析し，次に， n が 2 以上の場合について考える．

3.4.3.1 $n=1$ の場合

この場合，初めてのユニット故障が発見された際に，修理を施すことなくシステム内の全てのユニットが取替えられる．1 サイクル当たりの平均稼働時間は，式(2.20)を用いて，

$$\mu_s^{(1)} = \int_0^\infty \bar{F}_s(t) dt = \int_0^\infty \prod_{i=1}^m \bar{F}_i(t) dt \quad (3.44)$$

と表される．次に，1 サイクル当たりの平均コストは，

$$\begin{aligned} C_o &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \{kC_I + C_D(kT-t) + C_P\} dF_s(t) \\ &= C_I \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s(kT) + C_D \left(T \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_s(kT) - \mu_s^{(1)} \right) + C_P \end{aligned} \quad (3.45)$$

となる．また，1 サイクル当たりの平均間隔（平均取替間隔）は

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} kT dF_s(t) = T \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s(kT) \quad (3.46)$$

である．以上より，平均コストレートは，

$$C(1,T) = \frac{C_o}{\tau} = C_D + \frac{C_I}{T} + \frac{C_P - C_D \mu_s^{(1)}}{T \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s(kT)} \quad (3.47)$$

と表される．このように $n=1$ の場合はシステムの信頼度関数に関する完全な情報が与えられているので，比較的容易に平均コストレートを求めることができる．

3.4.3.2 $n \geq 2$ の場合

次に， n が 2 以上の場合について考える．この場合，システムの取替

えまでに，各ユニットがどのような順序で何回故障するかを表す故障パターンの数が n 及び m とともに増大すること，また計算の複雑性が増すことにより，一般的な解を求めるのは簡単ではない．例として $n=2, m=2$ の場合を付録 D で説明する．

そこで，本節では近似を用いて解析する方法を検討する．まず，平均コストレートを導出するために必要な近似を考える．仮に，小修理を行った後のシステムの信頼度関数が既知だとすると，式(3.47)をそのまま拡張することができる．しかし，式(3.47)には小修理のコストは考慮されていない．システムの取替えまでに，それぞれのユニットが何回小修理されるかを解析的に求めることは容易ではない．よって，小修理を行った後のシステムの信頼度関数 $\bar{F}_s^{(l)}(x)$ ($l \geq 2$) 及び小修理コスト C_M を近似により求める．

信頼度関数及び小修理コストの近似に用いる式は以下のとおりである．信頼度関数に用いる近似式を 2 種類提案し，近似式 A1，近似式 A2 と呼ぶ．小修理コストの近似に用いる式を近似式 B と呼ぶ．

近似式 A1（平均稼働時間を用いた信頼度関数の近似）

$$\bar{F}_s^{(l)}(x) = \prod_{i=1}^m \exp \left\{ -H_i \left(x + \sum_{j=1}^{l-1} \mu_s^{(j)} \right) + H_i \left(\sum_{j=1}^{l-1} \mu_s^{(j)} \right) \right\} \quad (l \geq 2) \quad (3.48)$$

近似式 A2（非定常ポアソン過程を用いた信頼度関数の近似）

$$\bar{F}_s^{(l)}(x) = \int_0^\infty \bar{F}_s \left(x + \frac{m-1}{2m} T + y \right) \frac{[H_s(y)]^{l-2}}{(l-2)!} h_s(y) dy \quad (l \geq 2) \quad (3.49)$$

近似式 B（小修理コストの近似）

$$\rho_i(n) = \frac{H_i \left(\sum_{l=1}^n \mu_s^{(l)} \right)}{H_s \left(\sum_{l=1}^n \mu_s^{(l)} \right)} \quad (3.50)$$

$$C_M = (n-1) \sum_{i=1}^m \rho_i(n) C_{Ri} \quad (3.51)$$

式(3.48)は $l-1$ 回目の小修理から次の故障までの稼働時間が必ず $\mu_s^{(l-1)}$ であると仮定することにより導かれる．一方，式(3.49)は点検間隔が十分短く，あるユニットが故障する確率はユニットに依らず等しいとした仮定を基に導かれる．近似式 B（式(3.50)及び(3.51)）は累積故障率の比によって各ユニットの小修理回数を決定することにより導かれる．それぞれの近似式の詳細は付録 E を参照されたい．信頼度関数の近似として近似式 A1，小修理コストの近似として近似式 B を用いる近似手法を近似手法 A1+B と呼び，信頼度関数の近似として近似式 A2，小修理コストの近似として近似式 B を用いる近似手法を近似手法 A2+B と呼ぶ．

3.4.3.3 平均コストレート

n が 2 以上の場合の 1 サイクル当たりの平均コスト及び平均取替間隔は，式(3.45)及び(3.46)を拡張し，次のように表すことができる．

$$C_O = (C_I + C_D T) \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s^{(l)}(kT) - C_D \sum_{l=1}^n \mu_s^{(l)} + (n-1) \sum_{i=1}^m \rho_i(n) C_{Ri} + C_P \quad (3.52)$$

$$\tau = T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s^{(l)}(kT) \quad (3.53)$$

ただし，

$$\mu_s^{(l)} = \int_0^{\infty} \bar{F}_s^{(l)}(x) dx \quad (3.54)$$

である．式(3.52)から(3.54)の $\mu_s^{(l)}$ ， $\bar{F}_s^{(l)}(x)$ 及び $\rho_i(n)$ に式(3.48)から(3.51)で提案した近似をそれぞれ適用する．平均コストレートは次式で計算できる．

$$C(n, T) = \frac{C_o}{\tau} = C_D + \frac{C_I}{T} + \frac{C_P - C_D \sum_{l=1}^n \mu_s^{(l)} + (n-1) \sum_{i=1}^m \rho_i(n) C_{Ri}}{T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s^{(l)}(kT)} \quad (3.55)$$

3.4.4 数値例

ここでは，図 3.14 に示すような，3つのユニットから構成されるミサイルについての数値例を紹介する．

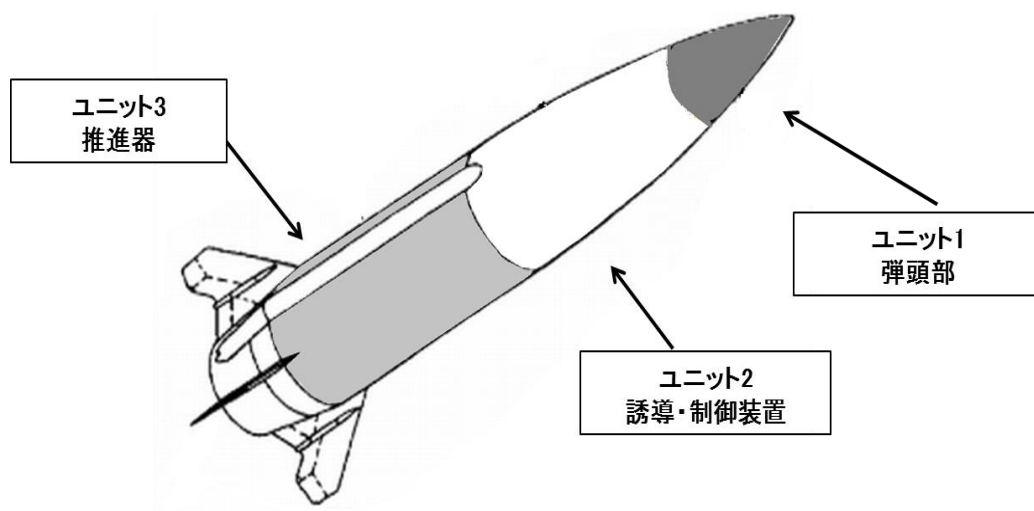


図 3.14 ミサイル

各ユニットのパラメータは表 3.8 のとおりである．なお， $\text{Wei}(\eta, \beta)$ は，ユニットの故障が尺度パラメータ η 及び形状パラメータ β のワイブル分布に従うことを意味する．

表 3.8 各ユニットのパラメータ

ユニット	分布関数	小修理コスト	C_I	C_D	C_P
1	$\text{Wei}(4000, 1.2)$	30	10	0.35	400
2	$\text{Wei}(5000, 1.5)$	40			
3	$\text{Wei}(6000, 2.0)$	50			

結果は表 3.9 に示すとおりである．なお，表中の誤差は，サンプル数 1 0 0 万個のモンテカルロ・シミュレーションの平均を真の値として評価している．

なお，モンテカルロ・シミュレーションの実行に必要な，時間 y だけ稼働した後の $\text{Wei}(\eta, \beta)$ に従う乱数を W とすると， W は式(3.1)と逆関数法により， U を一様乱数として，

$$W = \eta \left\{ \left(\frac{y}{\eta} \right)^\beta + \ln \frac{1}{1-U} \right\}^{\frac{1}{\beta}} - y \quad (3.56)$$

で生成される．

表 3.9 各手法での最適解

計算手法	n	T	$C(n, T)$
シミュレーション	8	293	0.1422
近似手法 A1+B	8	316	0.1398
誤差(%)	0	7.9	-1.7
近似手法 A2+B	8	298	0.1426
誤差(%)	0	1.7	0.3

表 3.9 より，取替えまでの故障回数 n はどちらの近似手法でも同じであるが，点検間隔及び平均コストレートの誤差は，どちらも近似手法 A2+B の方がより小さく，真の値に近いことが分かる．

図 3.15 に，近似手法 A2+B を用いた場合の， $n=1$ と $n=8$ のときの点検間隔と平均コストレートの変化を示す．図 3.15 の最適解付近を拡大した様子を図 3.16 に示す．

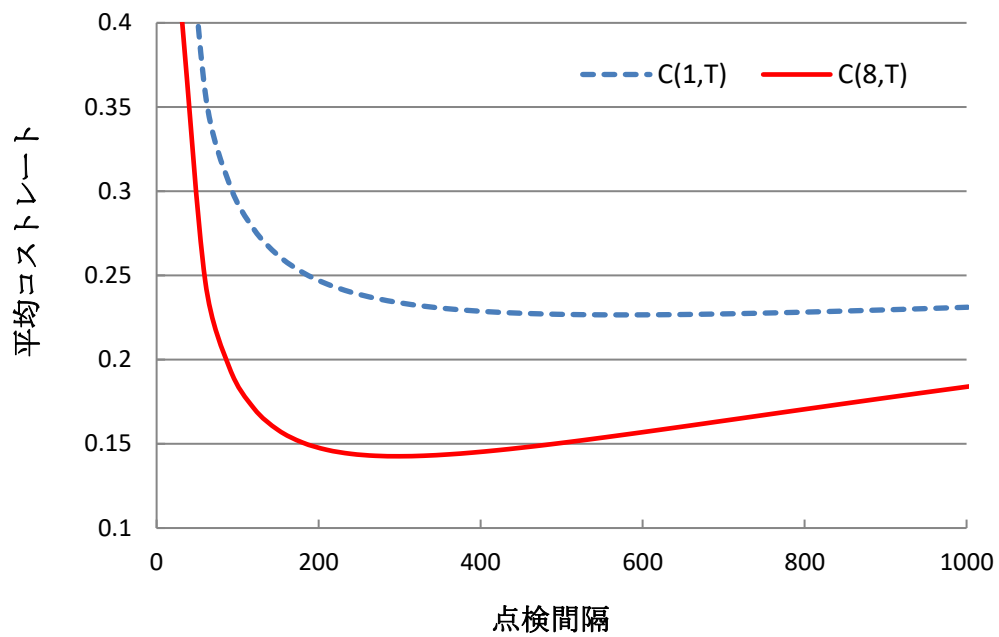


図 3.15 平均コストレートの変化

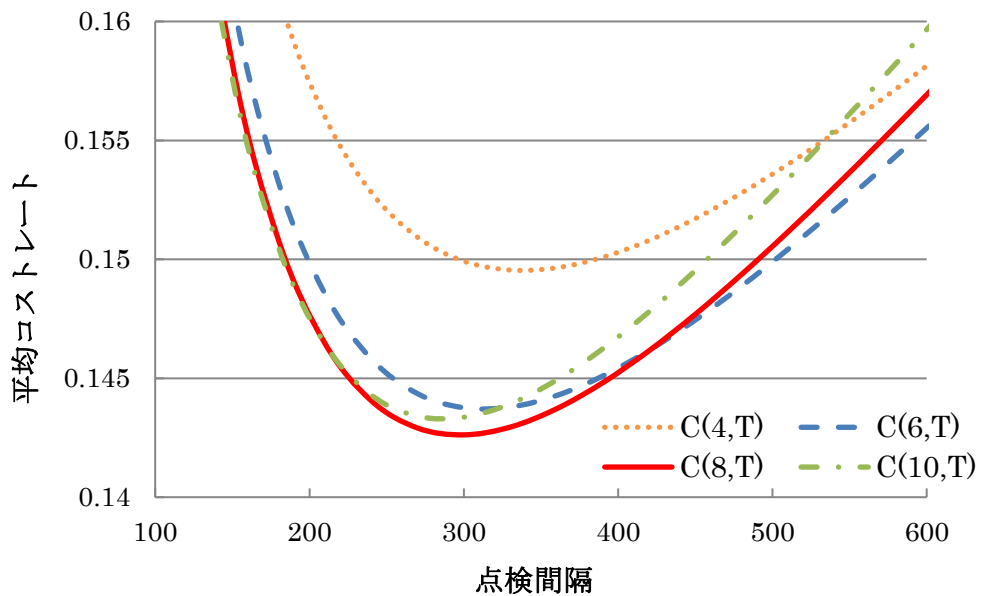


図 3.16 平均コストレートの変化（拡大）

図 3.15 と図 3.16 から，平均コストレートは n の値によりそれぞれ異なる点検間隔で最小値を持つことがわかる．図 3.17 に，固定した n ($3 \leq n \leq 10$) に対する平均コストレートの最小値と，それを与える点検間隔の最適解の推移を示す．

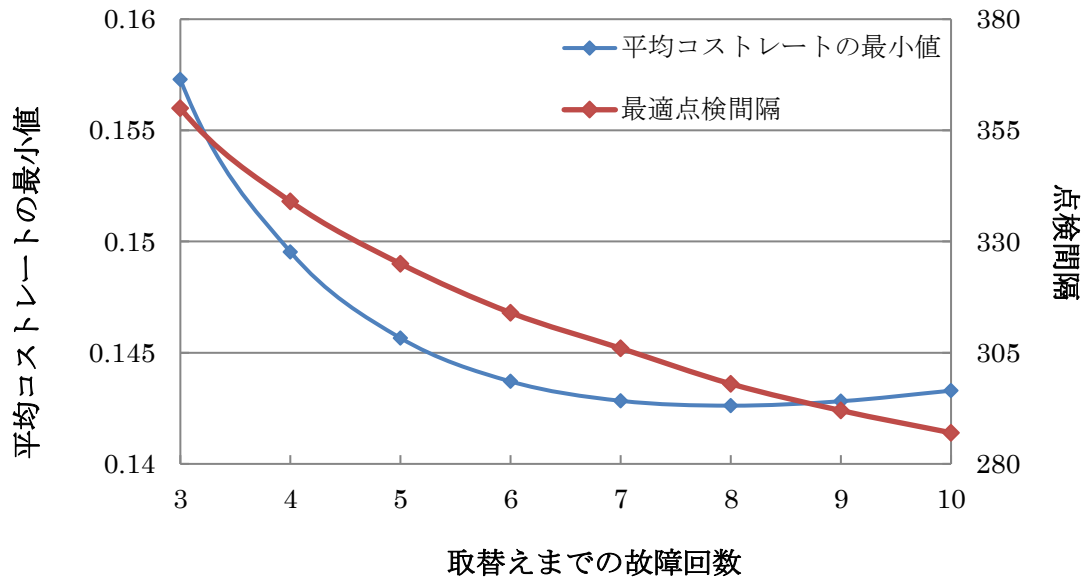


図 3.17 n による最小平均コストレートと最適間隔の変化

図 3.17 から，確かに $n=8$ のときに平均コストレートは最小値をもつことが確認できる．また， T の最適値が n の増加とともに小さくなっていることがわかる． n の値が大きくなったときには，取替え前の最後の小修理から，取替えまでの平均稼働時間は短くなる．つまり，近似手法 A2+B の場合， $n-1$ 回目の小修理の後の稼働時間の期待値 $\mu_s^{(n-1)}$ は， n の増加とともに減少する．また，平均取替間隔を n の関数 $\tau(n)$ で表すと， n に関する増分

$$\tau(n+1) - \tau(n) = T \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s^{(n+1)}(kT) \quad (3.57)$$

も n の増加とともに減少する．この傾向は近似手法 A1+B の場合も同じである．よって， T の値が同じならば， n の値が大きくなるにつれ，1 サイクルに占める平均ダウンタイムの割合は増加し，相対的にダウンコストが上昇する．この効果による全体のコストレート上昇が， T の減少による他のコストの増加（主として単位時間当たりの点検コスト C_i/T の増

加) よりも急になるため, T の最適値は減少する方向に推移するものと考えられる.

次に, 近似誤差を評価する. 信頼度関数の近似精度を評価するため, その平均であるシステムの平均稼働時間の誤差を尺度として用いる. 表 3.10 及び 3.11 で, それぞれ近似式 A1 及び A2 での平均稼働時間の誤差を示す.

表 3.10 近似式 A1 による平均稼働時間誤差(%)

$T \backslash n$	2	4	6	8	10
100	-1.2	-0.7	-0.1	0.5	1.0
200	-0.2	1.0	2.0	2.9	3.6
300	0.7	2.6	4.2	5.4	6.4
400	1.5	4.3	6.3	7.8	9.0
500	2.5	5.9	8.5	10.3	11.8
600	3.3	7.6	10.5	12.7	14.4
700	4.2	9.3	12.6	15.1	17.2
800	5.0	10.9	14.8	17.5	19.8
900	5.9	12.6	16.9	19.9	22.5
1000	6.7	14.1	18.9	22.3	25.1

表 3.11 近似式 A2 による平均稼働時間誤差(%)

$T \backslash n$	2	4	6	8	10
100	-0.1	0.0	0.0	-0.1	0.0
200	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
300	-0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.2
400	-0.2	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4
500	-0.1	-0.2	-0.3	-0.5	-0.6
600	-0.3	-0.3	-0.5	-0.6	-0.9
700	-0.2	-0.4	-0.6	-0.9	-1.2
800	-0.2	-0.6	-0.8	-1.3	-1.6
900	-0.2	-0.6	-1.0	-1.5	-2.0
1000	-0.3	-0.8	-1.3	-1.8	-2.4

表 3.10 と表 3.11 を比べると，どの場合においても近似式 A2 の精度が一桁程度よいことがわかる．システムの真の平均稼働時間は，点検間隔が長くなるにつれ短くなることが予想されるのに対し，近似式 A1 は点検間隔に依存しないことが原因として挙げられる．誤差の全体的な傾向は両手法で同じであり， n 及び T の増加に伴い増大する．これは主に，同一点検間隔内で複数の故障が発生しないという仮定が成り立たなくなることによると考えられる．実際の点検では，故障が発見されること自体まれであることを考慮すれば，近似式 A2 を適用することは実用的な近似だといえる．近似手法 A1 では，点検間隔が短い場合に誤差の符号が逆になる一方，近似手法 A2 では 0 に近づいている．これは，近似式 A2 は， T が 0 に十分近いときには厳密解となるためである．

次に， $T=300$ とし，近似式 A1，A2 及びモンテカルロ・シミュレーションでの，7 回目の小修理を行った後の信頼度，即ち $\bar{F}_s^{(8)}(x)$ を図 3.18 に示す．

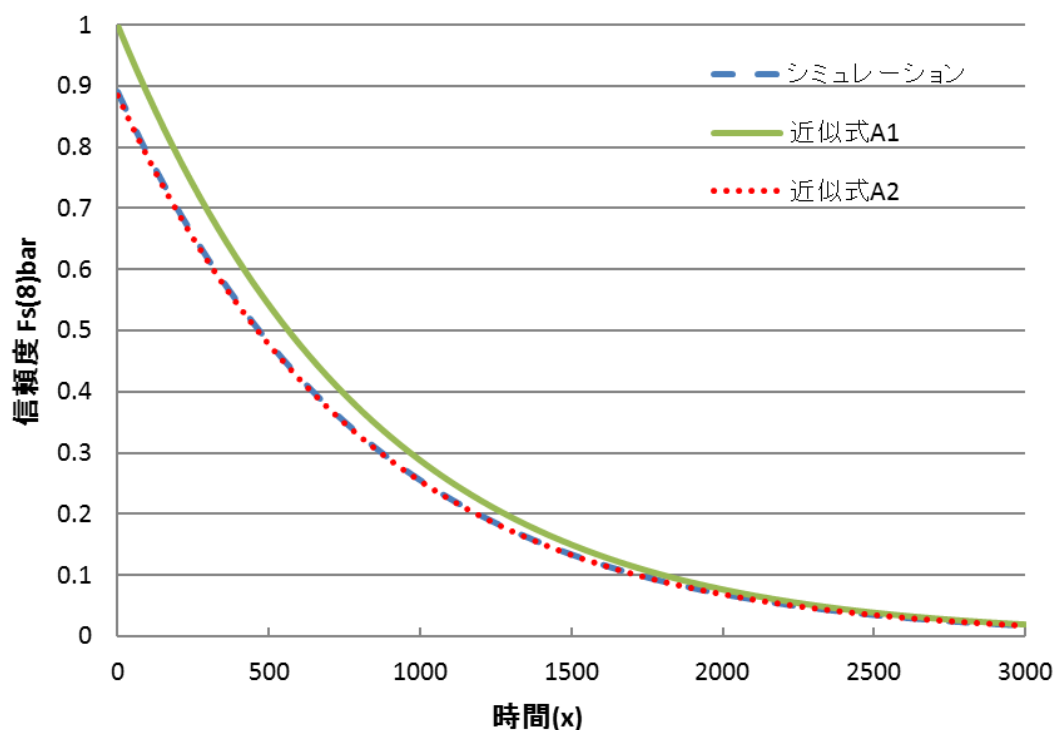


図 3.18 各手法による信頼度関数 $\bar{F}_s^{(8)}(x)$

図 3.18 では，モンテカルロ・シミュレーションによる結果と近似式 A2 の結果はほぼ一致しているといえる．このため，式(3.55)の最右辺第 3 項の分母の値も，近似式 A2 を用いるとほとんど誤差がないと考えられる．本来信頼度は，時刻が 0 のとき 1 になるはずである．しかし，近似式 A2 では，式(3.49)からわかるように，信頼度関数の時間軸が $(m-1)T/(2m)$ だけ負側に移動しており，図 3.19 ではモンテカルロ・シミュレーションの結果と同様に $x=0$ での信頼度は 0.9 程度であり 1 を下回っている．この差は，システムの 8 回目の故障が，7 回目以前の故障と同時に発見される確率を表している．なぜなら，その場合 8 回の小修理を含む複数の小修理が同時に行われ，7 回目の小修理後の稼働時間は 0 と考えることができるからである．

次に，小修理コストの近似誤差を評価するため，各ユニットの故障割合 $\rho_i(n)$ のうち，最も誤差の絶対値が大きい値を表 3.12 と表 3.13 に示す．小修理コストについては同じ近似を用いているものの，近似式に平均稼働時間を含むため，近似手法 A1+B と A2+B で誤差は異なる．

表 3.12 近似手法 A1+B による故障割合の最大誤差(%)

$T \backslash n$	2	4	6	8	10
100	1.2	0.6	0.5	0.4	0.3
200	1.9	1.2	1.0	0.8	0.6
300	2.3	2.0	1.5	1.2	0.9
400	4.5	2.6	2.0	1.6	1.2
500	5.7	3.3	2.5	2.0	1.5
600	7.0	4.0	3.0	2.3	1.8
700	8.3	4.7	3.5	2.6	2.0
800	9.5	5.3	3.9	3.0	2.3
900	10.8	5.9	4.3	3.3	2.5
1000	12.1	6.5	4.8	3.6	2.7

表 3.13 近似手法 A2+B による故障割合の最大誤差(%)

$T \backslash n$	2	4	6	8	10
100	1.2	0.5	0.5	0.5	0.5
200	1.9	1.4	1.3	1.3	1.2
300	3.3	2.2	2.2	2.2	2.0
400	4.6	3.2	3.0	3.0	2.8
500	6.0	4.0	3.7	3.7	3.6
600	7.3	4.9	4.6	4.6	4.3
700	8.7	5.8	5.4	5.4	5.0
800	10.0	6.6	6.1	6.1	5.8
900	11.5	7.4	6.8	6.8	6.4
1000	12.7	8.2	7.6	7.6	7.1

表 3.12 と表 3.13 を比べると, やや近似手法 A1+B の誤差の方が小さいといえる. ただし, 平均稼働時間の誤差は近似手法 A2+B の方が小さいことから, 累積故障率関数を用いた小修理コストの近似方法に改善の余地がある.

全体の傾向としては両手法とも同じであり, T が大きくなるにつれ誤差は増大し, n が増えるにつれ誤差は減少する. T とともに誤差が大きくなる原因は, 同一点検間隔内で複数故障が発生することによると考えられる. また, n の増加とともに誤差が減少するのは, 小修理の回数が増えるにつれ, 各ユニットの平均小修理回数がならされる結果と考えられる. なお, 最大誤差を与えるユニットは多くの場合ユニット 3 である. これは, ユニット 3 の形状パラメータが 2.0 と他の 2 ユニットと比べ大きいことが影響していると考えられる.

3.4.5 まとめ

本節では, 合計 n 回目の故障が発見されたときに取替えられる, 複数のユニットからなるワンショットシステムの保全モデルを提案した. 各ユニットの故障は点検でのみ発見できると仮定し, システム

の平均コストレートを定式化した．また，得られた平均コストレートが最小となる点検及び取替方策を決定した．解析に当たっては，システムの信頼度関数について 2 種類，小修理コストについて 1 種類の近似式を提案した．数値例の結果から，非定常ポアソン過程の結果を用い，ダウンタイムを推定して近似する方法がより正確だということが分かった．しかし，同時に行った小修理コストの近似方法については改善の余地があることも分かった．

3.5 非定期点検モデル

本節では，3.2 節のシングルユニットモデルにおいて，点検方策を定期点検から逐次点検に変更することで，コストのさらなる低減を目指す．基本的には定期的に点検を行うものの，故障の発見を一つの転換点とし，その前後で点検間隔を変更するモデルを提案する．本節では，メタヒューリスティックな戦略を用いた方法による最適化を試みる．

3.5.1 記 号

3.2.1 節に準じる他，以下のとおりとする．

$T^{(l)}$: $l-1$ 回目の小修理を行った後の点検間隔

τ : 取替間隔の期待値

$C_n(T^{(1)}, \dots, T^{(n)})$: システムの平均コストレート

C_o : システムの取替え直後から次の取替えまでの間にかかるコストの期待値

3.5.2 仮 定

モデルの仮定は，3.2.2 節に準じる他，以下に示すとおりとする．また，図 3.19 はシステムの状態の時間経過の一例を示している．

- (1) 直近の取替えから発生した故障回数が l 回 ($l=1, 2, \dots, n-1$) である間，システムは一定時間 $T^{(l+1)}$ 毎に点検される．
- (2) 保全にかかる時間は全て無視できる．

このシステムが目標アベイラビリティ α を満たしつつ，平均コストレートが最小となる最適な保全方策を決定する．

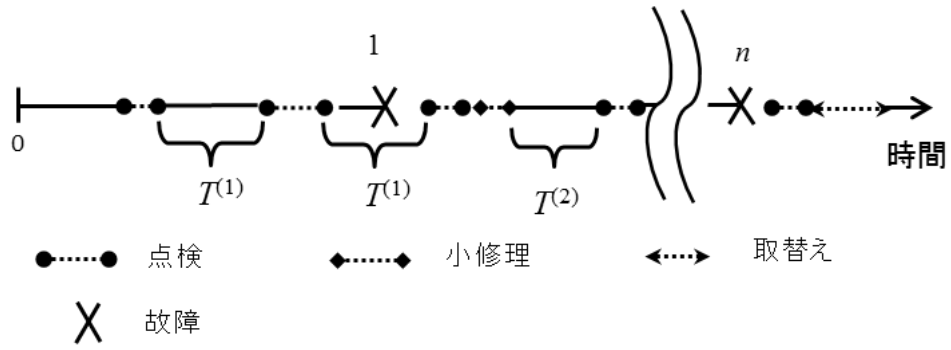


図 3.19 システムの状態の時間経過の一例

3.5.3 目的関数の導出

システムは n 回目の故障が発見された時点で再生すると考えることができる．よって，取替えから取替えまでの間を 1 サイクルとして解析する．点検時間がシステムの故障回数に依存するから，平均取替間隔は式 (3.11) を変形して式 (3.58) のように表される．

$$\begin{aligned}\tau &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T^{(l)}}^{kT^{(l)}} \{k(T^{(l)} + m_l) + m_r\} dF^{(l)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T^{(n)}}^{kT^{(n)}} \{k(T^{(n)} + m_l) + m_p\} dF^{(n)}(x) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \{(T^{(l)} + m_l) \bar{F}^{(l)}(kT^{(l)})\} + (n-1)m_r + m_p\end{aligned}\quad (3.58)$$

1 サイクル当たりの平均コストは，同様に式 (3.12) から，

$$C_o = C_l \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT^{(l)}) + (n-1)C_r + C_p\quad (3.59)$$

となる．よって，平均アベイラビリティ及び平均コストレートはそれぞれ

$$A(T^{(1)}, \dots, T^{(n)}) = \frac{\sum_{l=1}^n \mu^{(l)}}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \{(T^{(l)} + m_l) \bar{F}^{(l)}(kT^{(l)})\} + (n-1)m_R + m_P} \quad (3.60)$$

$$C(T^{(1)}, \dots, T^{(n)}) = \frac{C_I \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT^{(l)}) + (n-1)C_R + C_P}{\sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \{(T^{(l)} + m_l) \bar{F}^{(l)}(kT^{(l)})\} + (n-1)m_R + m_P} \quad (3.61)$$

となる．

式 (3.60) が α 以上を満たしつつ，式 (3.61) を最小化する n 及び $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(n)}$ の値を決定する．

3.5.4 アルゴリズム

本節のモデルでは，最適化すべき変数が多く，傾斜法等のヒューリスティックな手法では局所最適解に陥る蓋然性が高いため，メタヒューリスティックな方法であるアニーリング法により最適解を求める．初期温度は数値例では 0.001 を用いた．ただし，これはパラメータにより調整する必要がある．ある n に対して各点検間隔 $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(n)}$ を決めるアルゴリズムを以下に示す．

ステップ 1 : $A(T^{(1)}, \dots, T^{(n)}) \geq \alpha$ を満たす初期解 $\{T^{(1)}, \dots, T^{(n)}\}$ を選ぶ．

ステップ 2 : 各点検間隔を ± 3.0 の間でランダムに変更する¹．

ステップ 3 : 新しい点検間隔での平均アベイラビリティ及び平均コストレートを計算する．新しいアベイラビリティが α 以上を満たし，かつ平均コストレートが前回より小さくなった場合，その解に更新する．新しいアベイラビリティが α 以上を満たし，かつ平均コストレートが前回より大きくなった場合，

¹ 区間 $[-3, 3]$ の一様分布に従う乱数を逆関数法で生成し，加える．

確率 $\exp(-D/t)$ でその解に更新する．ただし， t は温度， D はコストレートの差の絶対値を表す．新しいアベイラビリティが α 未満の場合，解は更新しない．

ステップ 4：温度 t を 0.95 倍し，ステップ 2 に戻る．ただし，解が 200 回連続で更新されなかった場合，現在の解を最適解とする．

3.5.5 数値例

数値例で用いるパラメータを表 3.14 とする．ただし，点検，小修理及び取替えにかかる時間は全て指数分布に従うものとし， $m_I=3$ ， $m_R=6$ ， $m_P=8$ とする．また， $\alpha=0.9$ である．

表 3.14 パラメータ

分布関数	尺度パラメータ (η)	形状パラメータ (β)	C_I	C_R	C_P
ワイブル	3000	2.0	10	40	400

最適解は表 3.15 となった．なお，定期点検の結果は式(3.13)及び(3.14)による．

表 3.15 最適解

方策	n	最適点検間隔	最適平均 コストレート
定期点検	4	266	0.1174
非定期点検	4	$T^{(1)}=385$ $T^{(2)}=262$ $T^{(3)}=226$ $T^{(4)}=211$	0.1151

次に， n を既知としたときの最適点検間隔及びそのときの平均コストレートを表 3.16 に示す．

表 3.16 n を固定したときの最適解

n	点検間隔						最小平均 コストレート
	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$T^{(3)}$	$T^{(4)}$	$T^{(5)}$	$T^{(6)}$	
2	465	317	-	-	-	-	0.1239
3	414	288	247	-	-	-	0.1166
4	385	261	225	211	-	-	0.1151
5	360	247	210	195	179	-	0.1160
6	336	231	204	182	168	162	0.1182

表 3.16 では，ある n に対して点検間隔が故障とともに減少する量 ($T^{(l)} - T^{(l-1)}$, $l \geq 2$) は，故障の発生 (l の増加) とともに小さくなっている．システムの故障分布は IFR なので，平均故障発生間隔は故障の発生とともに短くなっていくが，このケースでは，連続する小修理の間での故障率の増分が小さくなっているからだと考えられる．つまり，次表で示すように， l 回目までの平均稼働時間時刻での故障率の増分は， l の値とともに減少しているためである．

表 3.17 故障率の差

l	2	3	4	5	6	7
l 回目の故障までの 平均稼働時間	3988	4985	5816	6543	7197	7797
上段時刻での故障率 ($\times 10^{-4}$)	8.86	11.08	12.92	14.54	15.99	17.33
故障率の増分 ($\times 10^{-4}$)		2.22	1.84	1.62	1.45	1.34

次に，定期点検方策との比較を行う．定まった n に対する最小コストレートの推移を図 3.20 に，両方策の差を表 3.18 に示す．

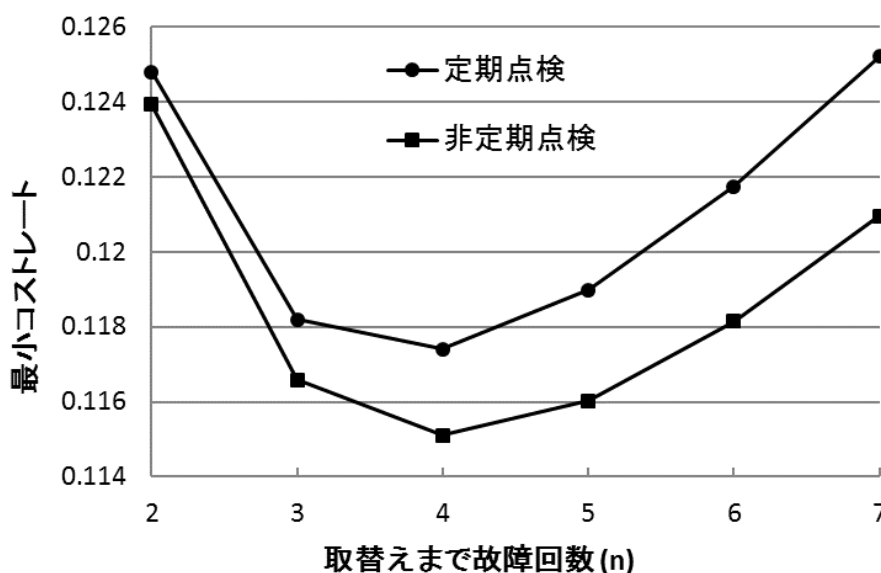


図 3.20 定まった n に対する最小コストレートの比較

表 3.18 定期点検方策からの最小平均コストレートの減少量(%)

$\beta \backslash n$	2	3	4	5	6	7
1.5	-0.3	-0.5	-0.7	-0.9	-1.0	-1.1
2.0	-0.7	-1.4	-2.0	-2.5	-3.0	-3.4
2.5	-1.2	-2.3	-3.4	-4.3	-5.2	-6.2

表 3.18 より，形状パラメータ及び n の増加とともに，最小コストレートの差が大きくなっていることが分かる．これは，故障率の増加速度が速いほど，非定期点検が有利になることを表していると考えられる．

3.5.6 まとめ

本節では，3.2 節で提案してシングルユニットモデルを拡張し，故障発見時に点検間隔を変更する非定期点検方策を提案した．最適解の決定

にはメタヒューリスティックな方法を用いた．数値計算から，システムの故障がワイブル分布に従うとき，形状パラメータが大きいほどコストの削減効果が大きいことが分かった．

3.6 取替時期管理方法に関する考察

前節までは、 n 回目の故障が発見された際に取替えが行われるという仮定を設けていた。しかし、現実的にはある運用時間に達したならば取替えを行うといった方法もよく用いられる。そこで、本節では定期的に点検されるシングルユニットのワンショットシステムに対し、取替時期に関する管理方法を、これまでの故障回数による方法（回数管理法）と点検回数による方法（時間管理法）の比較を行う。

回数管理法は 3.2 節で議論したとおりである。一方、時間管理法の定式化は容易でないため、モンテカルロ・シミュレーションを用いて比較を行う。

3.6.1 記 号

3.2.1 節に準じる他、以下のとおりとする。

m : 時間管理方策における、取替えを行う点検回数

$C_t(m, T)$: 時間管理法によるシステムの平均コストレート

$C_f(n, T)$: 回数管理法によるシステムの平均コストレート

ϕ^* : 変数 ϕ の最適値

3.6.2 仮 定

回数管理法の仮定は 3.2.2 節と同一とする。ただし、保全にかかる時間は全て無視できるものとする。時間管理法では、システムは時刻 mT で取替えられるものとする。ただし、当該時点で点検は行わない。また、システムの故障は尺度パラメータ η , 形状パラメータ β のワイブル分布に従うものとする。

3.6.3 数値実験

パラメータは表 3.14 と同一とする．サンプル数 1 0 0 万個のモンテカルロ・シミュレーションの平均を真の値とし， n または m を固定したときの最適コストレートの推移を図 3.21 及び 3.22 に示す．

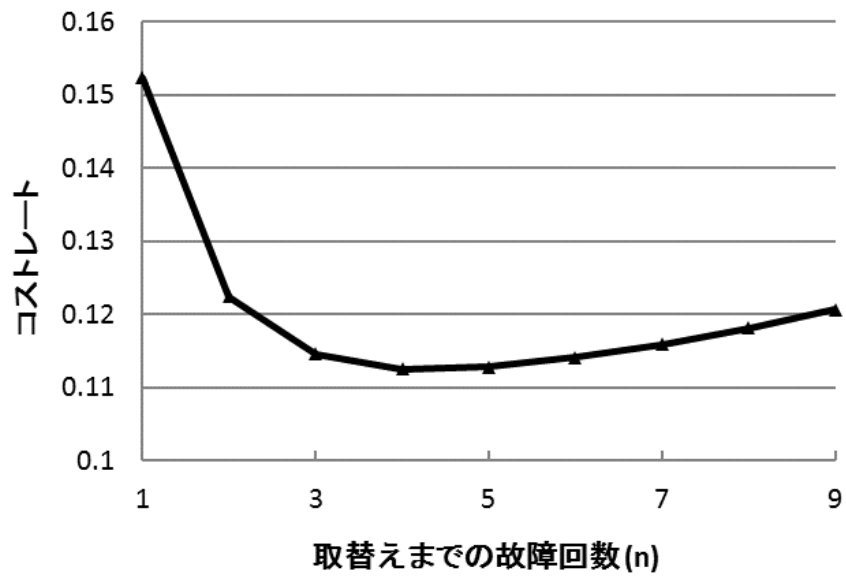


図 3.21 回数管理法

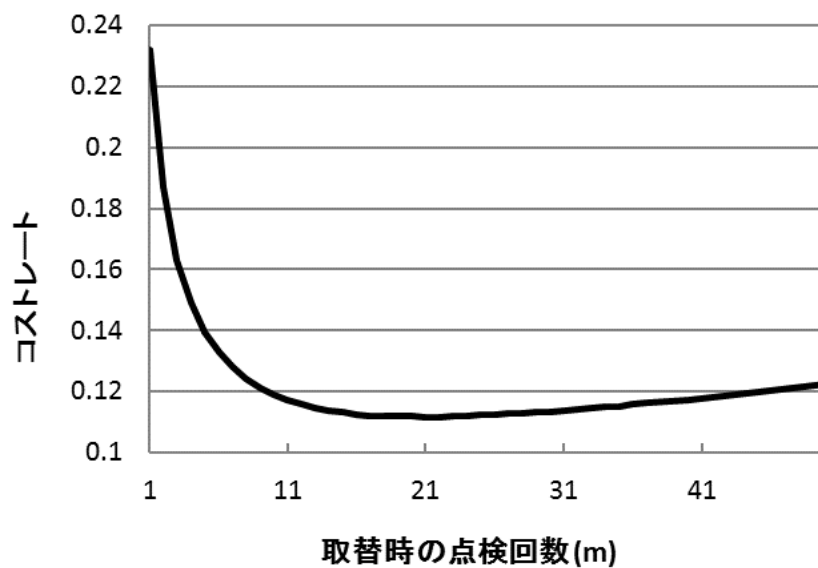


図 3.22 時間管理法

両方策とも下に凸の形となっており，大域的最適解が唯一存在していることがわかる．次に， $C_P=400$ 及び $C_P=80$ の場合に，形状パラメータを変化させたときの両方策での最適コストレートの比 C_f^*/C_t^* の推移を図 3.23 に示す．その他のパラメータは表 3.14 と同じままである．

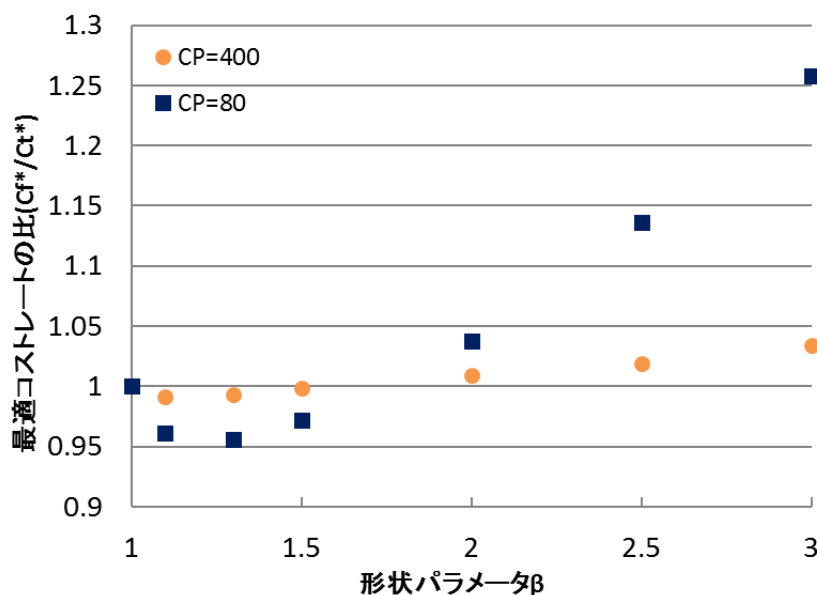


図 3.23 β による最適コストレート比の変化

図 3.23 では，縦軸が 1 よりも大きい範囲では時間管理法が有利であり，1 より小さい範囲で回数管理法が有利となる．図から，形状パラメータが 1 に近い場合は $C_P=80, 400$ いずれの場合も回数管理法が若干有利であるが，形状パラメータが 2 以上の場合時間管理法が有利となることが分かる．図中 $C_P=80$ で回数管理法が最も有利となるのは $\beta=1.3$ のときで，両方策の最適解は $C_f(2,533)=0.0408$ 及び $C_t(11,546)=0.0427$ であった．なお， $\beta \rightarrow 1$ 及び $\beta \rightarrow \infty$ の場合，両方策は同等または時間管理法が有利となることが理論的に導かれる（付録 F 参照）．また，式(F.11)より $\beta \rightarrow \infty$ のとき最適コストレート比は 1.0025 ($C_P=400$ のとき) または 1.125 ($C_P=80$ のとき) に収束する．

図 3.23 で用いた点検コスト $C_I=10$ を， $C_I=2$ に変更した場合の結果を図 3.24 に示す．

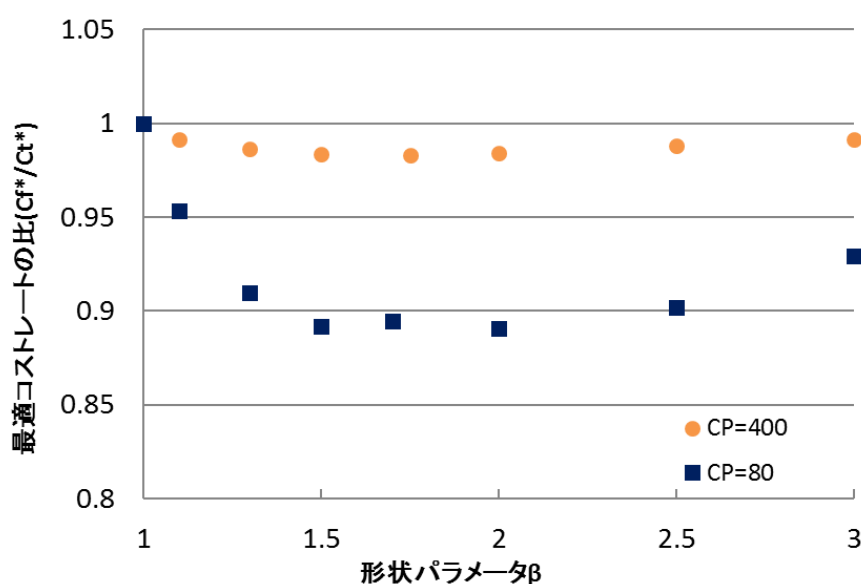


図 3.24 $C_I=2$ での β による最適コストレート比の変化

図 3.24 では、 $C_P=400$ 及び 80 いずれの場合でも、広い範囲で回数管理法のほうが有利となり、その差は最大約 10% となった。図 3.24 中、 $C_P=80$ で回数管理法が最も有利となるのは $\beta=2.0$ のときで、両方策の最適解は $C_f(1,590)=0.0305$ 及び $C_t(6,608)=0.0342$ であった。

以上のことから、点検コストが取替えコストに比べ安価のときには回数管理法が有利であるといえる。文献[36]では、ワイブル分布に従って発生する故障が点検に依らず即座に発見される場合に、回数管理法と時間管理法を比較し、回数管理法が $1 < \beta < \infty$ で常に有利であるということを示した。これは本節のモデルで点検コストを 0 とした場合に相当する。なぜなら、 $C_I=0$ とすると点検間隔の最適値は 0 に漸近し、結果としてフォールト検出時間も無視できるからである。よって、点検コストが減少すると文献[36]の仮定に近づくと考えられ、回数管理法が有利になるという本節の実験結果は理に適っている。

3.6.4 まとめ

本節では、シングルユニットのワンショットシステムに対し、これま

での故障回数を管理することにより取替時期を管制する方法及び定期点検の回数により管制する方法を比較した．故障がワイブル分布に従う場合，点検コストが取替えコストに比べて安価のとき，回数管理法が有利であることが確認できた．また，結果が先行研究の結果をよく反映しており，理に適ったものであるということが確認できた．

ただし，現実にはこれらの方策を適用する際には，回数管理法では取替時期が確率変数であることを考慮する必要があると思料する．例えば，取替作業の準備にリードタイムが必要な場合には回数管理法は本節の結果より不利となり得る．

3.7 おわりに

本章では，小修理を伴うワンショットシステムの保全モデルをいくつか提案し，点検などの保全方策の最適化を行った．

3.1 節において本研究の背景を示し，3.2 節から 3.6 節において提案モデルとその解析手法を示した．

3.2 節では，最も基本的なモデルとして，単一ユニットからなるワンショットシステムを取り上げた．システムの故障は点検でのみ発見され，故障が発見されたならば直ちに小修理が行われると仮定し，平均アベイラビリティ及び平均コストレートを導出した．そして，必要となる平均アベイラビリティを満たす点検間隔の中で，平均コストレートが最小となる点検間隔を求めた．

3.3 節から 3.6 節では，シングルユニットモデルを基本とし，より現実的なワンショットシステムに対応できるよう，拡張モデルを提案した．

ワンショットシステムを構成するコンポーネントの中には，化学反応により作用するようなものも多く存在する．このようなコンポーネントは，実際にシステムを使用するまで故障しているかどうかはわからないことが多い．そこで，3.3 節では 2 ユニットモデルを提案した．一つのユニットは 3.2 で取り上げたユニットと同じであるが，もう一つのユニットは，どのような点検でも故障が発見されないと仮定した．点検でも故障の発見されないユニットの取替方策を 2 つ提案し，それぞれについて最適な点検及び取替間隔を決定した．また，平均アベイラビリティ及び平均コストレートを比較することで，2 つの方策の優劣を比較した．

3.4 節では，故障分布関数の異なる複数のユニットが直列に接続されているシステムを取り上げた．取替えまでの最適な小修理回数及び定期点検間隔を決定した．ただし，解析解を得るためには複雑な計算が必要であるため，近似を用いて平均コストレートを導出した．近似精度をモンテカルロ・シミュレーションの結果と比較し，ある程度実用的な近似であることを確認した．

さらに 3.5 節では，故障が発見される度に点検間隔を変更するモデルを提案した．メタヒューリスティックな方法により，変数の最適化を行った．数値例の結果から，定期点検方策よりも有利な運用が可能となることを確認した．最後に 3.6 節にて，故障の発見を契機とする取替方策と，定期点検の回数，つまり定期的に取り替えを行う方策を比較し，それぞれが有利となる条件を考察した．

本章で提案したモデルは次のような発展性がある．

まず，ワンショットシステムでなくとも，点検でのみ故障が発見されるようなシステムであれば同様に適用できる．例えば，ネットワークにおけるウイルス検知問題[65]などにも適用できると考える．

このように，広い範囲で実用システムへの適用が可能である．よって本章での成果は，点検でのみ故障が発見され，小修理が行われるシステムにおいて，保全費用あるいは稼働率の要求を満たす保全方策の決定に役立つといえる．

第4章 一定の確率で補給遅延時間が発生するシステムの保全方策

4.1 はじめに

システムに故障が発生した際，その運用場所に修理に必要な予備品等のアイテムや工具，あるいは修理人等の保全資源がある場合，すぐさま修理作業に取り掛かれるため補給遅延時間は発生しない．通常のシステムは稼働場所の近くの倉庫等の適切な場所でそれらを保管し，予備品等の欠品がないよう発注することで補給遅延時間を見做せるレベルに抑えている場合が多い．このとき，補給遅延時間は修理等の保全施設の能力を超える複数の故障ないし重大な故障発生時に初めて発生するが，このような問題は待ち行列理論がしばしば用いられ，解析されてきた[44]．

ただし，運用場所に保全資源が十分存在しないシステムも実際には存在する．船舶等のビークルに搭載されている，レーダ等のシステムがそれにあたる（図4.1）．

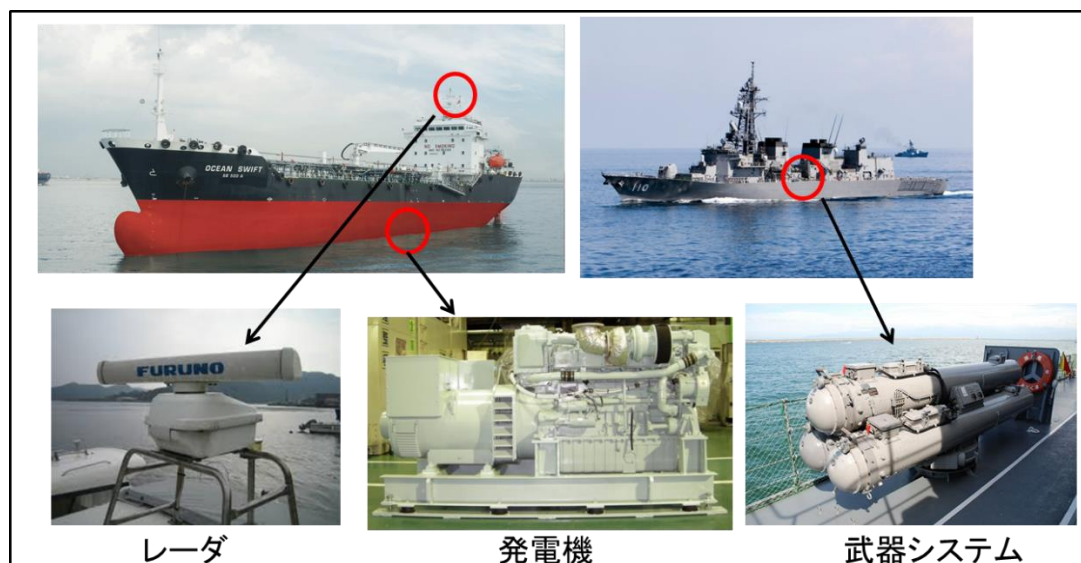


図 4.1 ビークルに搭載されているシステムの一例

ビークルはそれ自体が移動体であるため、故障が発生した際に保全資源がその場に存在するわけではない。特に、軍艦等の特殊な任務を帯びたビークルは、搭載されているシステムに対応する保全資源の保管場所が少ないことや予算上の都合により、保全資源の搭載量は限られる。各国海軍では、COSAL (Consolidated Shipboard Allowance List) と呼ばれるリストを作り、軍艦に搭載する予備品等を管理している[66]-[68]。ビークルに搭載されているシステムが故障し、当該ビークル内に必要な保全資源の無い場合、その取得のため補給遅延時間が発生する。このとき、必要な保全資源の有無は確率事象として考えることができる。

先行研究では、確率過程に基づき補給遅延時間が発生するケースはしばしば扱われてきた。一方、ビークルに搭載されているシステムへは、より単純化した形である一定の確率により遅延が発生するという仮定が適当であると考えられるが、このようなモデルはこれまで明示的には扱われてこなかった。また、故障の種類を確率的に分類した研究はこれまで多数あるが、補給遅延時間の有無に着目した分類はされていない。本章では、上述のようなビークルに搭載されているシステムを考え、確率的に補給遅延時間が発生する場合の保全方策を提案する。故障が起こった際に、補給遅延時間が発生しない確率を p 、発生する確率を $1-p$ で表す。それぞれの故障をタイプ 1 故障、タイプ 2 故障と呼ぶ。タイプ 2 故障の修理は即座に行えず、ビークルの航海等の作業の終了後、必要な保全資源を取得した上で行われるので、それまでの間システムは非稼働となり、補給遅延時間が発生する。なお、システムの故障がビークルの作業、即ち船舶の航海等に影響を及ぼす確率は無視できるものとする。確率 p を ORP (Onboard Repairable Probability) と呼ぶ。ビークルに搭載する保全資源を増やすと、その購入や維持に必要な費用が増加する一方、ORP が増加し、ビークルに搭載されているシステムの稼働率は増加する。よって、最適な ORP の存在が予想される。

運用場所にどのような予備品を用意すべきかという問題は修理キット問題(repair kit problem)と呼ばれ、具体的な予備品等のリストを決定す

る手法の研究が進んでいる[69]-[72]．修理キット問題も興味深い研究であるが，本章では具体的な搭載品目を決定するのではなく，ORP を最適化することで間接的に最適な搭載品目の決定に寄与する．つまり，ある ORP に対する最適な搭載品目は修理キット問題の研究により解決済みと仮定する．

ビークルは指数分布に従う期間の航海等の作業に従事するものとする．これは，軍艦の警戒監視任務や戦闘行動等，事前に期間を予測することが容易でない場合を想定している．ビークルに搭載されているシステムのオーバーホール（取替え）までの平均アベイラビリティ及び平均コストレートを定式化し，ある目標アベイラビリティを満たさねばならないという制約の下，平均コストレートが最小となる最適保全方策について議論する．

本章で議論するモデルは表 4.1 のとおりである．以下，4.2 節にて本章で用いる用語と記号を記し，4.3 節で CFR モデル，4.4 節で IFR モデルをそれぞれ議論する．IFR モデルでは故障復旧時に行われる修理を小修理と仮定する．最後に 4.5 節で結論を述べる．

表 4.1 提案モデルの概要

節	モデル	概 要
4.3	CFR モデル	CFR システムに対し最適な ORP を決定する．
4.4	IFR・作業回数管理方策 (4.4.1 節)	IFR システムが， N 回目の作業終了時に取替えられるモデル．最適な ORP 及び N の値を決定する．
	IFR・作業時間管理方策 (4.4.2 節)	IFR システムが， T 時間を超えない作業終了時に取替えられるモデル．最適な ORP 及び T の値を決定する．

4.2 用語と記号

本章で用いる用語及び記号を以下に示す.

ビークル：船舶等の移動体

(ビークルの) 作業：ビークルに付与された航海等の任務

ORP: Onboard Repairable Probability

タイプ 1 故障：即座に修理作業が行われる故障

タイプ 2 故障：作業終了後に修理作業が行われる故障

p ：発生した故障がタイプ 1 故障である確率，つまり ORP ($0 \leq p < 1$)

$P_1(l, t)$ ：時刻 t までにタイプ 1 故障が l 回発生する確率

$P_2(t)$ ：時刻 t までにタイプ 2 故障が発生する確率

a_n ： n 回目の作業でタイプ 2 故障が発生する確率

h ：故障率 (CFR モデル)

$h(t)$ ：故障率関数

$H(t)$ ：累積故障率関数

η ：ワイブル分布の尺度パラメータ

β ：ワイブル分布の形状パラメータ

$G(x)$ ：ビークルの作業時間分布， $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ．ただし， $\lambda > 0$

X_n ： n 回目の作業時間を表す確率変数

Y_n ： n 回目までの作業時間の和を表す確率変数

C_{R1} ：タイプ 1 故障の小修理コスト

C_{R2} ：タイプ 2 故障の小修理コスト

C_O ：オーバーホールコスト ($C_O > C_{R1}$ かつ $C_O > C_{R2}$)

$C_L(p)$ ：ORP が p であるときの保全資源の単位時間当たりの搭載コスト
(搭載コストレート)

$C_1(p), C_2(N, p), C_3(T, p)$ ：時間間隔 $[0, \infty)$ での平均コストレート

$A_1(p), A_2(N, p), A_3(T, p)$ ：時間間隔 $[0, \infty)$ での平均アベイラビリティ

α ：目標平均アベイラビリティ

N : オーバーホールを行うまでの作業回数 (IFR モデル)

T : オーバーホール間隔の上限値 (IFR モデル)

Φ^* : 変数 Φ の最適値

4.3 CFR モデル

本節では，システムの故障が指数分布に従う場合を考える．これは，システムの劣化が進行しない場合以外にも，Drenick の定理[73]により直列システム全体の故障分布を指数分布に近似できる場合等の広い範囲で有用である．

システムの故障が指数分布に従うとき，オーバーホールと小修理は区別されず，結果として高額な費用を要するオーバーホールを行う必要はなくなる．1回の作業毎にシステムの状態は再生するので，その間の平均アベイラビリティ及び平均コストレートを考えれば十分である．

次小節以降，仮定，目的関数の導出，最適 ORP の性質，数値例，まとめの順で説明する．保全資源の搭載コストレートがある条件を満たす場合の最適 ORP を導出する．

4.3.1 仮 定

本節での仮定は以下のとおりである．

- (1) ビークルは時刻 0 から航海等の作業に従事する．作業時間は $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ に従う ($\lambda>0$)．
- (2) 故障はパラメータ h ($h>0$) の指数分布に従い発生する．
- (3) 故障の発生によりビークルの作業が中断される確率は無視できる．
- (4) 故障の発生と作業の終了は互いに独立である．
- (5) ビークルに搭載されているあるシステムは時刻 0 から稼働を始め，ビークルの作業中常に稼働することが求められる．システムの故障は確率 p で即座に修理され (タイプ 1 故障)，確率 $1-p$ で即座に修理されず，作業終了後に修理される (タイプ 2 故障)．なお，タイプ 2 故障発生後，システムの修理の完了まで新たな故障は発

生しない．また，故障の発生により p は変化しない．

(6) 確率 p を維持するために必要な単位時間当たりのコスト $C_L(p)$ は， p に関する単調増加関数であり，既知である．

(7) 修理にかかる時間は無視できる．

システムの状態推移の一例を図 4.2 に示す．図 4.2 では，作業開始後タイプ 1 故障が 2 回連続して発生し，その後タイプ 2 故障が発生している．その後，作業の終了までの間ダウンタイム（補給遅延時間）が発生している．

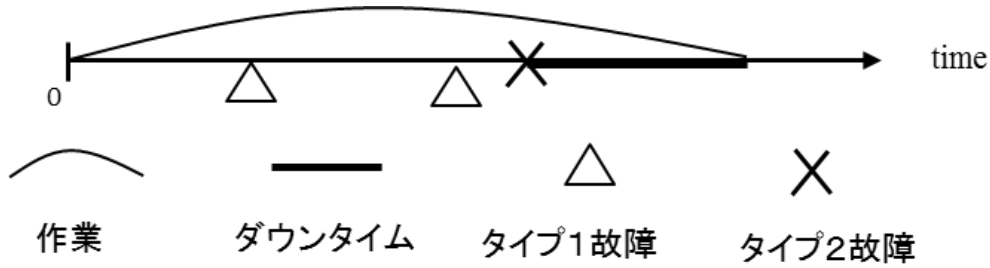


図 4.2 CFR モデルの状態推移

4.3.2 目的関数の導出

本小節では，1 回の作業終了までの平均アベイラビリティ $A_1(p)$ 及び平均コストレート $C_1(p)$ がそれぞれ式(4.1)及び(4.2)で表されることを示す．

$$A_1(p) = \frac{\lambda}{(1-p)h + \lambda} \quad (4.1)$$

$$C_1(p) = \frac{\lambda h}{(1-p)h + \lambda} \{pC_{R1} + (1-p)C_{R2}\} + C_L(p) \quad (4.2)$$

(証明)

時刻 t までにタイプ 2 故障が発生する確率 $P_2(t)$ は，作業時間が t よりも長いとき，次式で表される．

$$P_2(t) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} p^k \frac{H(t)^k}{k!} e^{-H(t)} = 1 - \exp\{-(1-p)H(t)\} \quad (4.3)$$

なお，式(4.3)は，小修理または取替えで対処される 2 種類の故障を扱った研究[74]でも導かれている．一方，タイプ 2 故障発生後にタイプ 1 故障が発生しない事実を考慮すると，時刻 t までにタイプ 1 故障が l 回発生する確率 $P_1(l, t)$ は次式となる．

$$P_1(l, t) = p^l \left\{ \frac{H(t)^l}{l!} e^{-H(t)} + (1-p) \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{H(t)^k}{k!} e^{-H(t)} \right\} \quad (4.4)$$

タイプ 1 故障回数の期待値とタイプ 2 故障確率には， $0 \leq p < 1$ で次式の関係が成り立つ（付録 G 参照）．

$$\sum_{l=1}^{\infty} l P_1(l, t) = \frac{p}{1-p} P_2(t) \quad (4.5)$$

次に，1 回の作業でタイプ 2 故障が発生する確率は，

$$\int_0^{\infty} P_2(x) dG(x) = \frac{(1-p)h}{(1-p)h + \lambda} \quad (4.6)$$

となるので，平均アベイラビリティを $A_1(p)$ とすると，

$$A_1(p) = 1 - \frac{\frac{(1-p)h}{(1-p)h + \lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}}{1/\lambda} = \frac{\lambda}{(1-p)h + \lambda}$$

となる．なお，上式では指数分布の無記憶性よりタイプ 2 故障の発生からビークルの作業終了までのダウンタイムの期待値は $1/\lambda$ となっている．次に，1 作業当たりのタイプ 1 故障の平均発生回数は，

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{\infty} l P_1(l, x) dG(x) = \frac{ph}{(1-p)h + \lambda} \quad (4.7)$$

で計算できる．平均作業時間は $1/\lambda$ であるので，平均コストレート $C_1(p)$ は次式で表される．

$$C_1(p) = \frac{\lambda h}{(1-p)h + \lambda} \{pC_{R1} + (1-p)C_{R2}\} + C_L(p) \quad \blacksquare$$

4.3.3 最適 ORP の性質

最適解を与える ORP を最適 ORP と呼び，そのときのコストレートを最適コストレートと呼ぶ．本小節では，特別な条件が成立する場合についての最適 ORP の性質と最適コストレートについて議論する．

目標アベイラビリティは α であるから， $A_1(p) \geq \alpha$ より，

$$p \geq 1 - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\lambda}{h} \quad (4.8)$$

を得る．ここで，

$$\tilde{p} \equiv 1 - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{\lambda}{h} \quad (4.9)$$

とおく．ただし， $-\infty < \tilde{p} < 1$ であるので，ORP は $\max(\tilde{p}, 0)$ 以上である必要がある．式(4.2)を p で微分すると，

$$C_1'(p) = \frac{\lambda h}{\{h(1-p) + \lambda\}^2} \{(h + \lambda)C_{R1} - \lambda C_{R2}\} + C_L'(p) \quad (4.10)$$

となる．さらに， $C_1'(p) = 0$ とおくと，

$$1 + \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2 h C_{R1}} \{h(1-p) + \lambda\}^2 C'_L(p) = \frac{C_{R2}}{C_{R1}} \quad (4.11)$$

を得る．式(4.11)の左辺を $Q(p)$ とおくと， $Q(p)$ が C_{R2}/C_{R1} より小さい区間でコストレートは減少し，大きい区間で増加する． $Q(p)$ が p に関して非減少関数のときについて考えると²，以下のように解を分類できる．

(A) $Q(1) < \frac{C_{R2}}{C_{R1}}$ のとき

$C'_1(p) < 0$ より $p^* = 1$ である．このときのアベイラビリティ及びコストレートの最適値は．

$$A_1^*(1) = 1 \quad (4.12)$$

$$C_1^*(1) = hC_{R1} + C_L(1) \quad (4.13)$$

である．

(B) $Q(\max(\tilde{p}, 0)) < \frac{C_{R2}}{C_{R1}} < Q(1)$ のとき

$$p^* = \hat{p} \quad (4.14)$$

である．ただし， \hat{p} は $Q(p) = C_{R2}/C_{R1}$ の解である（図 4.3）．

² 例えば， $C_L(p) = -c \ln(1-p)$ のとき， $Q(p)$ は $\lambda \geq h$ の範囲で p に関して単調非減少となる．また， $C_L(p) = cp^n$ ($n \geq 2$) のときは， $\lambda \geq 2h/(n-1)$ の範囲で満たされる．なお， c は正の定数とする．

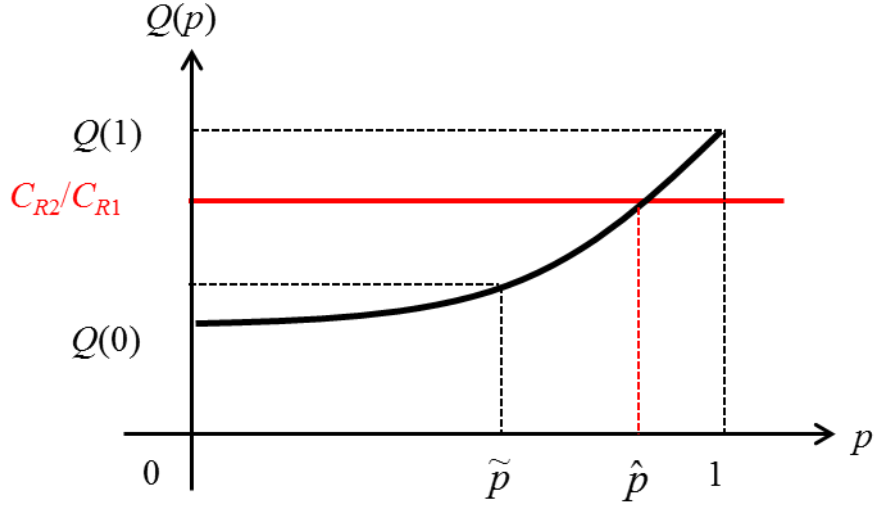


図 4.3 $Q(p)$ と \hat{p} の関係 ($\tilde{p} > 0$ のとき)

(C) $\frac{C_{R2}}{C_{R1}} < Q(\max(\tilde{p}, 0))$ のとき

$C'_1(p) > 0$ よりコストレートは p に関する単調増加なので, 最適 ORP は $p^* = \max(\tilde{p}, 0)$ であり, このときのアベイラビリティ及びコストレートはそれぞれ以下となる.

$$A_1(\tilde{p}) = \alpha \quad (4.15)$$

$$C_1(\tilde{p}) = \{\alpha h - (1 - \alpha)\lambda\}C_{R1} + (1 - \alpha)\lambda C_{R2} + C_L(\tilde{p}) \quad (4.16)$$

$$A_1(0) = \frac{\lambda}{h + \lambda} \quad (4.17)$$

$$C_1(0) = \frac{\lambda h}{h + \lambda} C_{R2} + C_L(0) \quad (4.18)$$

4.3.4 数値例

CFR モデルの数値例を示す. 計算に用いるパラメータを $C_{R1}=10$, $\lambda=1$ 及び $\alpha=0.9$ とする. また, 2 種類の搭載コストレート $C_L(p) = -\log(1-p)$,

$C_L(p)=3p^3$ を考える．それぞれの搭載コストレートの p との関係を図 4.4 に示す．

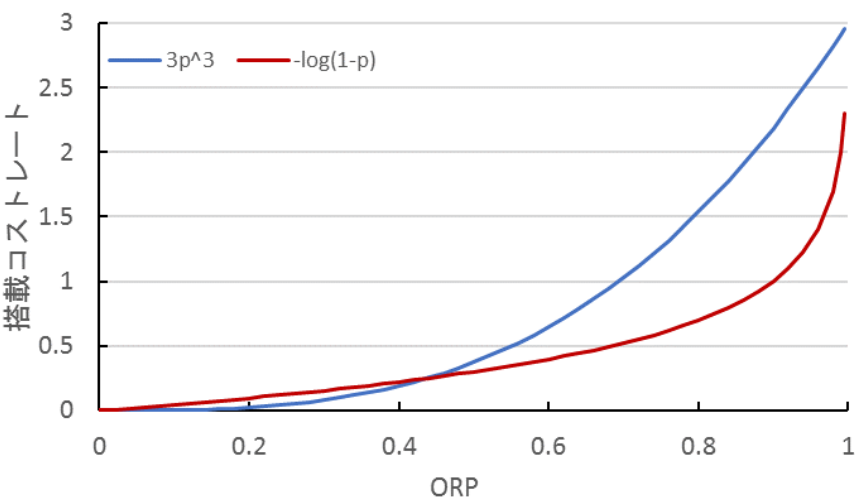


図 4.4 ORP と搭載コストレートの関係

いくつかの故障率及びタイプ 1 故障とタイプ 2 故障の修理コストの比に応じた最適 ORP を表 4.2 及び 4.3 に示す．ただし，表中の \tilde{Q} は $Q(\max(\tilde{p},0))$ を意味している．また，シャープ (#) 付きのセル，白色のセル及び灰色のセルはそれぞれ 4.3.3 節での分類 (A)，(B) 及び (C) を表している．

表 4.2 $C_L(p)=-\log(1-p)$ のときの最適 ORP

h	$\tilde{Q} \begin{smallmatrix} C_{R2}/C_{R1} \\ \nearrow \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5
0.01	5.44	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	1.63	0.00	0.46	0.46	0.85	0.89
0.2	1.68	0.44	0.69	0.69	0.92	0.94
0.5	1.98	0.78	0.79	0.79	0.96	0.97
1.0	2.48	0.89	0.89	0.89	0.98	0.99

表 4.3 $C_L(p)=3p^3$ のときの最適 ORP

h	\tilde{Q}	C_{R2}/C_{R1}	1	2	3	4	5
0.01	1.01		0.00	0.10	0.15	0.18	0.21
0.1	1.10		0.00	0.30	0.43	0.54	0.64
0.2	2.30		0.44	0.44	0.58	0.75	0.90
0.5	2.84		0.78	0.78	0.85	# 1.00	# 1.00
1.0	2.88		0.89	0.89	# 1.00	# 1.00	# 1.00

故障率 h の値が小さく，タイプ 2 故障の修理コストも比較的安い範囲では，最適 ORP が 0 になっていること確認できる．最適 ORP は， h または C_{R2} が増加するとき，目標アベイラビリティを満たすため増加する．また，表 4.2 では， $Q(1)=\infty$ となるため分類（A）の解は存在しない．表 4.3 では，分類（B）の範囲が h の増加とともに狭くなっている様子が確認できる．これは， $\max(\tilde{p}, 0)$ が 1 に近づくためである．

4.3.5 まとめ

本節では，システムの故障が指数分布に従う場合の最適 ORP について議論した．平均アベイラビリティ及び平均コストレートを導出し，ビークルへの保全資源の搭載コストレートが特定の条件を満たすとき，3 種類の場合分けにより最適 ORP を決定できることを示した．しかし， p に関する任意の関数である搭載コストレートに依らず普遍的にもつ最適 ORP の性質を導出するのは容易ではなく，今後さらなる検討が必要である．

4.4 IFR モデル

本節では，システムの故障率が時間とともに無限大へ増加するケースを考える．このとき，システムを有限の間隔でオーバーホールする必要があるが，ORP とともにこのオーバーホール実施時期についても最適化の対象とする．オーバーホールは通常ビークルの作業終了後の機会に行われるが，どの作業終了時に行うかを定める方策を 2 種類提案する．一つは N 回目の作業終了時に行う作業回数管理方策であり，もう一つはある事前に決められた時間を超えないような作業終了時に行う作業時間管理方策である．作業回数管理方策は管理が簡単であり，しばしば用いられる方策といえる．一方，作業時間管理方策は予め定められた時間を超えずにオーバーホールが行われるため，運用者はシステムの長期使用による劣化の進行を心配する必要がない．また，後で示すようにオーバーホール時期の分散が小さく，準備の上で有利である．

次小節以降，作業回数管理方策，作業時間管理方策の順で説明する．

4.4.1 作業回数管理方策

本小節では，作業回数管理方策について議論する．以下，仮定，目的関数の導出の順で説明し，平均コストレートの挙動と N の最適値について議論する．ORP が既知のとき，平均コストレートの挙動を場合分けし，それぞれに対して最適な N の決定方法を記す．

4.4.1.1 仮 定

本小節での仮定は以下のとおりである．

- (1) ビークルは時刻 0 から航海等の作業に連続的に従事する．各作業時間は $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ に従い，互いに独立である．
- (2) 故障は故障率関数 $h(t)$ に従い発生する．故障率関数は $h(0)=0$,

$h(\infty)=\infty$ を満たす狭義単調増加関数である．

- (3) 故障の発生と作業の終了は互いに独立である．
- (4) 故障の発生によりビークルの作業が中断される確率は無視できる．
- (5) 作業中の故障は確率 p でタイプ 1 故障であり，即座に小修理される．確率 $1-p$ でタイプ 2 故障であり，実施中の作業終了後に小修理される．タイプ 2 故障の発生から作業終了までの間ダウンタイムが発生する．なお，タイプ 2 故障発生後，システムの修理の完了まで新たな故障は発生しない．また，故障の発生により p は変化しない．
- (6) N 回目の作業終了時にオーバーホールが行われ，システムは新品同様となる．修理及びオーバーホールにかかる時間は無視できる．
- (7) 確率 p を維持するために必要な単位時間当たりのコスト $C_L(p)$ は， p に関する単調増加関数であり，既知とする．

図 4.5 に，システムの状態推移の一例を示す．目標アベイラビリティ α を満たしつつ，オーバーホールまでの平均コストレートが最小となる N , p を決定する．

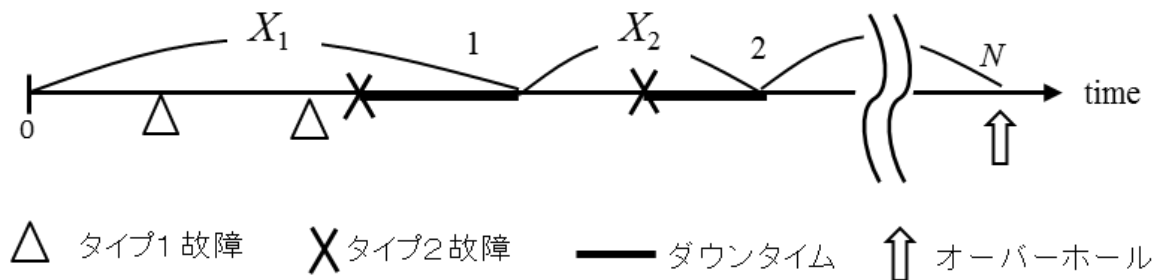


図 4.5 作業回数管理方策でのシステムの状態推移の一例

4.4.1.2 目的関数の導出

IFR の場合，タイプ 2 故障が発生する確率は，作業の開始時刻に依存する．ある作業の開始時刻 y から当該作業が完了していない時刻 $y+t$ まですにタイプ 2 故障が発生する確率を $P_2(t|y)$ とすると，これは式(4.3)における故障率の時間軸を変化させた次式で表される．

$$P_2(t|y) = 1 - \exp[-(1-p)\{H(y+t) - H(y)\}] \quad (4.19)$$

次に， a_n を n 回目の作業中にタイプ 2 故障が発生する確率とすると，

$$a_n = \int_0^\infty \int_0^\infty P_2(x|y) dG(x) dG^{(n-1)}(y) \quad (4.20)$$

となる．ただし， $G^{(k)}(y)$ は $G(y)$ の k 重の畳み込みを表し， $G^{(0)}(t) \equiv 1$ とする．これを用いて，平均アベイラビリティ $A_2(N, p)$ は次式となる．

$$A_2(N, p) = 1 - \frac{\sum_{n=1}^N a_n / \lambda}{N / \lambda} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^N a_n}{N} \quad (4.21)$$

IFR の性質から， a_n は n に関して単調増加するので，アベイラビリティは N に関して単調減少する．

次に，式(4.5)が成り立つので，平均コストレート $C_2(N, p)$ は式(4.22)となる．

$$C_2(N, p) = \frac{\hat{C}(p) \sum_{n=1}^N a_n + C_o}{N / \lambda} + C_L(p) \quad (4.22)$$

ただし，

$$\hat{C}(p) \equiv \left(\frac{p}{1-p} C_{R1} + C_{R2} \right) \quad (4.23)$$

である．

4.4.1.3 平均コストレートの挙動と N の最適値

平均コストレートの挙動を解析し， N に関して単調減少，単峰または単調増加となる場合の条件を示すとともに，一定の ORP に対する最適な N を求める．

平均コストレートの N に関する差分をとると，

$$C_2(N+1, p) - C_2(N, p) = \frac{\lambda}{\hat{C}(p)N(N+1)} \left(b_N - \frac{C_o}{\hat{C}(p)} \right) \quad (4.24)$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} b_N &\equiv N \sum_{n=1}^{N+1} a_n - (N+1) \sum_{n=1}^N a_n = N \left(\sum_{n=1}^N a_n + a_{N+1} \right) - (N+1) \sum_{n=1}^N a_n \\ &= Na_{N+1} - \sum_{n=1}^N a_n \end{aligned} \quad (4.25)$$

である．故障率は単調増加なので， $a_{i+1} > a_i$ ($i=1, 2, \dots$) である．よって， $b_N > 0$ が成り立つ．さらに， b_N についても差分をとると，

$$\begin{aligned} b_{N+1} - b_N &= (N+1)a_{N+2} - \sum_{n=1}^{N+1} a_n - \left(Na_{N+1} - \sum_{n=1}^N a_n \right) \\ &= (N+1)(a_{N+2} - a_{N+1}) > 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

となるので， b_N は N とともに増加することが分かる．よって，式(4.24) 右辺の中括弧内も N とともに増加する．

N が無限大に近づくとき， $h(\infty) = \infty$ より a_n は

$$a_\infty = 1 \quad (4.27)$$

となる． b_∞ については

$$\begin{aligned} b_\infty &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_{N+1} - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[-(1-p)\{H(t+x) - H(t)\}] dG(x) dG^{(n-1)}(t) \\ &\quad + \lambda \int_0^{\infty} \exp[-(1-p)H(x) - \lambda x] dx \\ &= \lambda^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[-(1-p)\{H(t+x) - H(t)\} - \lambda x] dx dt \\ &\quad + \lambda \int_0^{\infty} \exp[-(1-p)H(x) - \lambda x] dx \quad (4.28) \end{aligned}$$

が成り立つ．

平均コストレートの挙動は式(4.24)右辺の一部である N の関数 $b_N - C_o / \hat{C}(p)$ の正負により決まるので，次の3種類に分類でき，それぞれの挙動に応じて $A_2(1, p) > \alpha$ のとき最適な N を決定することができる．図4.6に各分類での $b_N - C_o / \hat{C}(p)$ の N に関する推移を示す．

$$(A) \quad \frac{C_o}{\hat{C}(p)} < b_1 \text{ のとき}$$

コストレートは N に関して単調増加する．よって， $N^*=1$ である．

$$(B) \quad b_1 \leq \frac{C_o}{\hat{C}(p)} < b_\infty \text{ のとき}$$

コストレートは極小値を唯一もつ単峰形となる．コストレートは $N=i$ で最小値をとるとすると， i は次式を満たす正の整数である．

$$b_{i-1} \leq \frac{C_o}{\hat{C}(p)} < b_i \quad (4.29)$$

$A_2(i, p) > \alpha$ が成り立つとき, $N^* = i$ である. 成り立たないとき, $N^* = \tilde{N}$ である. ただし, \tilde{N} は次式を満たす正の整数である.

$$A_2(\tilde{N}+1, p) < \alpha < A_2(\tilde{N}, p) \quad (4.30)$$

まとめると,

$$N^* = \min(i, \tilde{N}) \quad (4.31)$$

と書ける.

(C) $b_\infty \leq \frac{C_o}{\hat{C}(p)}$ のとき

コストレートは N に関して単調減少する. N の最適値は前出の \tilde{N} である.

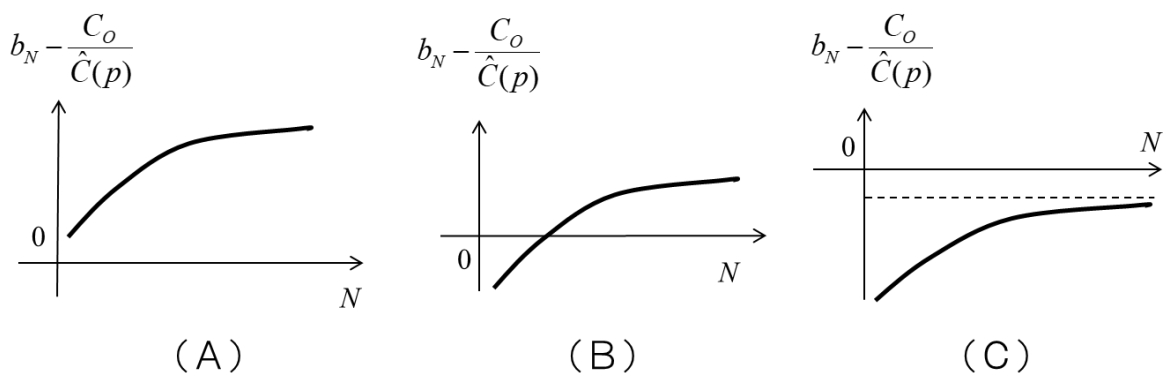


図 4.6 $b_N - C_o / \hat{C}(p)$ の N に関する推移

なお, 故障が形状パラメータ 2 以下のワイブル分布に従うとき, 式 (4.28) は正の無限大に発散する (付録 H 参照) ため, コストレートは単調減少とはならない.

4.4.2 作業時間管理方策

本小節では，作業時間管理方策について議論する．作業時間が事前に決められた時間 T を超えるか否かは作業開始前に分かるものとし， T と ORP を最適化する．以下に，仮定，目的関数の導出を説明し，平均コストレートの挙動と T の最適値について議論する．

4.4.2.1 仮定

作業時間管理方策での仮定は，4.4.1.1 節に準じる他，以下のとおりとする．

- (1) 各作業の開始前に，当該作業が予め決められた時間 T を超過するか否かは正確に判断できる．
- (2) オーバーホールは $Y_k < T < Y_{k+1}$ を満たす k 回目の作業終了時に行われる．ただし， Y_k は k 回目までの作業時間の和を表す確率変数である．

図 4.7 に，本方策でのシステムの状態推移の一例を示す．図では， $k+1$ 回目の作業終了時に初めて T を超えるので， k 回目の作業終了時にオーバーホールが行われている．

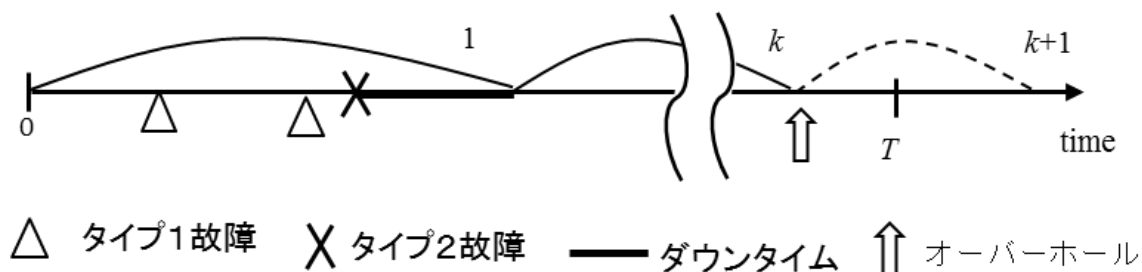


図 4.7 作業時間管理方策でのシステムの状態推移の一例

1 回目の作業時間が $X_1 > T$ を満たすとき，作業を 1 回も行わないまま

オーバーホールが行われる．しかし，作業時間分布の期待値 $1/\lambda$ は通常オーバーホール間隔の上限値 T より十分に短いため，この確率は無視できるほど小さい．

4.4.2.2 目的関数の導出

まず，オーバーホール間の平均作業時間は，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^T y e^{-\lambda(T-y)} dG^{(n-1)}(y) = T - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) \quad (4.32)$$

で表される．上式の y は $n-1$ 回目までの作業時間の和を意味している．また，被積分関数の $e^{-\lambda(T-y)}$ は， n 回目の作業が時間 $T-y$ 以上継続する確率を表している．なお，オーバーホール間隔の分散は次式で求められる．

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_0^T y^2 e^{-\lambda(T-y)} dG^{(n-1)}(y) - \left\{ T - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}) \right\}^2 = \frac{1}{\lambda^2} (1 - 2\lambda T e^{-\lambda T} - e^{-2\lambda T}) \quad (4.33)$$

作業回数管理方策におけるオーバーホール間隔は， N 個の独立で同一の指数分布 $G(x)$ を足し合わせた値となる³ので，その分散は N/λ^2 と等しい．一方，式(4.33)は常にこれより小さい値となる．

オーバーホールまでのシステムの平均稼働時間は式(4.34)となる．

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^{T-y} \int_0^x \{1 - P_2(t|y)\} dt dG(x) dG^{(n-1)}(y) \\ &= \lambda^2 \int_0^T \int_0^{T-y} \int_0^x \{1 - P_2(t|y)\} e^{-\lambda x} dt dx dy + \lambda \int_0^T \int_0^x \{1 - P_2(t)\} e^{-\lambda x} dt dx \end{aligned} \quad (4.34)$$

よって，平均アベイラビリティ $A_3(T, p)$ は

³ この値を表す確率変数が従う分布をアーラン分布といい，その分散は N/λ^2 となる [53]．

$$A_3(T, p) = \frac{\lambda^2 \int_0^T \int_0^{T-y} \int_0^x \{1 - P_2(t|y)\} e^{-\lambda x} dt dx dy + \lambda \int_0^T \int_0^x \{1 - P_2(t)\} e^{-\lambda x} dt dx}{T - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T})} \quad (4.35)$$

と表される．IFR の性質から，式(4.35)が T に関して単調減少するのは明らかである．

次に，オーバーホールまでのタイプ 2 故障回数の期待値を $\phi(T)$ とすると，

$$\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^{T-y} P_2(x|y) dG(x) dG^{(n-1)}(y) = \lambda^2 \int_0^T \int_0^{T-y} P_2(x|y) e^{-\lambda x} dx dy + \lambda \int_0^T P_2(x) e^{-\lambda x} dx \quad (4.36)$$

であるから，これを用いて平均コストレート $C_3(T, p)$ は

$$C_3(T, p) = \frac{\hat{C}(p)\phi(T) + C_o}{T - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T})} + C_L(p) \quad (4.37)$$

と表される．

4.4.2.3 平均コストレートの挙動と T の最適値

ORP が与えられたときの平均コストレートの T に関する挙動と T の最適値について次の結果を得た（付録 I 参照）．ただし，

$$S(T) = \lambda^2 \int_0^T \int_0^u \exp[-(1-p)\{H(u) - H(y)\}] e^{-\lambda(u-y)} dy du + \lambda \int_0^T \exp[-(1-p)H(u)] e^{-\lambda u} du \quad (4.38)$$

とする．

(A) $S(\infty) \leq \frac{C_o}{\hat{C}(p)}$ のとき

平均コストレートは T に関して単調減少する．最適 T は $A_3(T, p) = \alpha$ の唯一の解であり，これを \tilde{T} とする．

(B) $\frac{C_o}{\hat{C}(p)} < S(\infty) \leq \frac{C_o}{\hat{C}(p)} + 1$ のとき

平均コストレートの極値が存在するか否か不明である． T_1 を付録 I の式(I.4)の解とすると， $T_1 < \tilde{T}$ なら T^* は $T_1 < T < \tilde{T}$ の範囲で存在し，それ以外なら $T^* = \tilde{T}$ である．

(C) $\frac{C_o}{\hat{C}(p)} + 1 < S(\infty)$ のとき

平均コストレートの極値は一つ以上存在する． \hat{T} を式(I.2)の解のうち最も小さい解とすると， $\hat{T} < \tilde{T}$ のとき T^* は $\hat{T} < T < \tilde{T}$ の範囲でコストレートが最小となる T であり，それ以外のとき $T^* = \tilde{T}$ である．

なお，故障が形状パラメータ 2 以下のワイブル分布に従うとき， $S(\infty) = \infty$ より（付録 I.4 節参照），必ず（C）の条件が満たされる．

4.4.3 数値例

ここでは， $\alpha = 0.97$ とし，作業回数管理方策及び作業時間管理方策の数値例を示す．

パラメータを $H(t) = (t/15)^{1.5}$ ， $\lambda = 1$ ， $C_{R1} = 5$ ， $C_{R2} = 10$ ， $C_o = 25$ 及び $C_L(p) = -\log(1-p)$ とし， $p = 0.6, 0.7$ 及び 0.8 の場合の作業回数管理方策の平均アベイラビリティ及び平均コストレートの N に関する推移を図 4.8 に示す．点線がアベイラビリティを，実線がコストレートをそれぞれ表している．

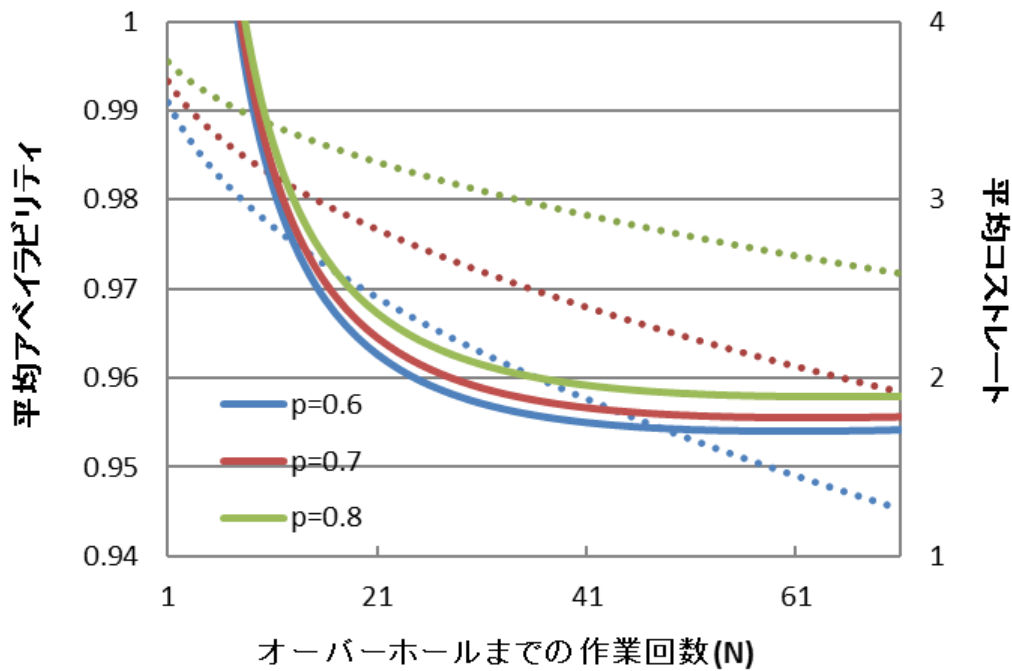


図 4.8 作業回数管理方策の目的関数

アベイラビリティは N に関して単調減少している様子が確認できる．一方，コストレートは単峰となっており，例えば $p=0.8$ では $N=64$ で最小値をとっている．また，最適解は $C_2(51,0.75)=1.840$ である．表 4.4 に，故障がワイブル分布 $H(t)=(t/\eta)^\beta$ に従う場合の最適解を示す．

表 4.4 作業回数管理方策での最適解

$\beta \backslash \eta$	10			15			20		
	N^*	p^*	コストレート	N^*	p^*	コストレート	N^*	p^*	コストレート
1.3	60	0.82	2.14	91	0.73	1.55	101	0.62	1.21
1.5	36	0.84	2.56	51	0.75	1.84	62	0.65	1.44
1.8	24	0.85	3.01	30	0.74	2.14	40	0.65	1.66
2.0	18	0.84	3.24	26	0.74	2.27	31	0.61	1.75

尺度パラメータ η が増加するとき，1 作業当たりのタイプ 2 故障は減少するので，アベイラビリティは増加する．よって，コストを削減するため N^* は増加し， p^* は減少している．形状パラメータ β が増加するとき，

目標アベイラビリティを満たすため、 N^* は減少している。

図 4.9 及び表 4.5 に作業時間管理方策での平均アベイラビリティ及びコストレートの推移並びに故障がワイブル分布に従うときの最適解を示す。パラメータはそれぞれ図 4.8 及び表 4.4 と同一である。

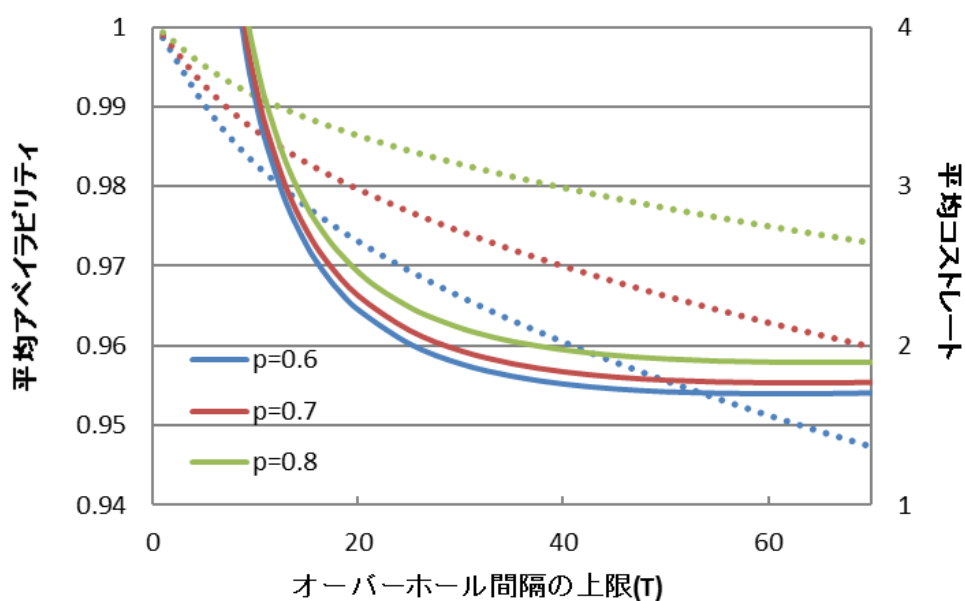


図 4.9 作業時間管理方策の目的関数

表 4.5 作業時間管理方策での最適解

$\beta \backslash \eta$	10			15			20		
	T^*	p^*	コスト レート	T^*	p^*	コスト レート	T^*	p^*	コスト レート
1.3	66	0.82	2.13	86	0.72	1.54	107	0.62	1.21
1.5	37	0.83	2.53	52	0.74	1.82	60	0.63	1.42
1.8	24	0.83	2.95	30	0.71	2.10	39	0.61	1.63
2.0	20	0.82	3.13	27	0.71	2.21	34	0.60	1.71

図 4.9 と表 4.5 はそれぞれ図 4.8 と表 4.4 と似たような傾向を持っている。なお、図 4.9 の例は、 $\beta=1.5 \leq 2$ より 4.4.2.3 節の分類 (C) に当たる。コストレートは単峰であり、例えば $p=0.8$ のとき $T=65$ で最小値 1.892 をとっている。ここでは $\lambda=1$ であるので、両方策の平均オーバーホール間隔は N 及び式 (4.32) よりほぼ $T-1$ である。表 4.4 と表 4.5 を比べると、パ

ラメータによりこの大小は異なる．一方，最適 ORP は常に作業時間管理方策の方が小さいまたは同じになっている．

4.4.4 2 方策の比較と考察

両方策での最適コストレートの比較結果を表 4.6 に示す．ただし， $C_2^* \equiv C_2(N^*, p^*)$, $C_3^* \equiv C_3(T^*, p^*)$ である．

表 4.6 最適コストレートの比 (C_2^*/C_3^*)

$\beta \backslash \eta$	10	15	20
1.3	1.005	1.004	1.004
1.5	1.011	1.009	1.009
1.8	1.019	1.017	1.018
2.0	1.032	1.025	1.022

表 4.6 は作業回数管理方策での最適コストレート C_2^* と作業時間管理方策での最適コストレート C_3^* の比を示したものである．全てのケースで 1 を超えていることから，作業時間管理方策が常に有利であることが分かる．この理由は，タイプ 2 故障が発生したときのダウンタイムによると考えられる．作業回数管理方策では，1 回のタイプ 2 故障に対し平均して $1/\lambda$ のダウンタイムが発生する．これは指数分布のもつ無記憶性によるものである．一方，作業時間管理方策では，時刻 t で発生したタイプ 2 故障によるダウンタイムは必ず $T-t$ より短い．これは，平均オーバーホール間隔が短いほど突出した差を生むと考えられる．実際，表 4.6 の値は最適オーバーホール間隔が短くなる， η が小さく β が大きいケースほど大きな値となっている．さらに，作業時間管理方策では離散値の N に対して連続値である T が変数であるので，より精度の高い値の設定により有利になることも考えられる．以上の理由から，作業時間管理方策が有利になっているものとする．

しかし，作業時間管理方策では，作業回数管理方策にはない，「作業

時間が T を超えるか否かが事前に正確に判断できる」という仮定が必要である．この仮定は，実運用上は妥当な仮定といえるが，数学的には期間が確率分布によって決定される以上，正確に判断できるということはありませんという問題がある．逆に， T を超えない分布であると仮定するならば，この新たな条件により，元の分布ではなくなってしまう．確率分布の実現値は予測できないという数学的見地から，Nakagawa and Zhao はオーバertime 方策 (overtime policy), 即ち予定した時刻を超えた始めの作業終了時に保全を行う方策を提唱している [75]．ただし，運用者にとっては定められた時間を超過しての運用は許容できない場合も多く，全ての実用システムへ適用できるわけではないと考える．

作業時間の予測が失敗する確率を考慮すると，作業時間管理方策の最適コストレートは 4.4.3 節の値より必ず増加する．その増加傾向は，前述のタイプ 2 故障による両方策のダウンタイムの差が顕著であるパラメータで同じく顕著であるので，作業回数管理方策との差はほとんど無くなる可能性，あるいは逆転する可能性もある．いずれにせよ，さらに詳しい解析が必要である．

4.4.5 まとめ

本節では，ビークルに搭載されているシステムの故障率が時間とともに増加する場合の保全方策を提案した．具体的には， N 回目の作業終了後にオーバーホールを行う作業回数管理方策と時間 T に達する直前の作業終了時にオーバーホールを行う作業時間管理方策である．それぞれについて平均アビリティ及び平均コストレートを導出し，それらの挙動を分析するとともに，最適解の分類を行った．数値例で両方策を比較した結果作業時間管理方策が常に有利であることが確認できた．

N 回目の作業等の終了時に保全を行うという方策は単純で分かりやすく，それゆえ古くから研究が行われてきた．一方，作業時間がある時間に達する前に保全を行う方策は本研究で初めて提案された．この方策は，

システムがオーバーホールされるまでの使用時数の基準が決まっているときに運用現場はよく用いられてきたものの、理論化されていなかった。しかし、「 T に達するか否かが確実に判断できる」という仮定は数学的には正確でない。よって、さらに現実的かつ数学的に正しいモデルを提案する必要がある。

4.5 おわりに

本章では、船舶等のビークルに搭載されているシステムを対象に、確率的に補給遅延時間が発生する場合の保全方策を提案した。ビークルに搭載されているシステムは、故障発生時に十分な保全資源が即座に使用できるわけではない。即座に利用できるか否かを一定の確率で表現し、その確率を維持するためのコストが既知の関数であると仮定し、CFR と IFR のシステムに対して解析を行った。CFR のシステムに対しては搭載コストがある条件を満たす場合に最適解を求めることができることを示した。IFR システムに対しては、作業回数に応じてオーバーホール（取替え）を行う方策と、使用時間に応じてオーバーホールを行う方策を提案し、それぞれ目的関数を導出し、その挙動を解析することで、最適解またはその探索に関する有益な情報を得た。しかし、4.4.4 節でも述べたように、IFR モデルの作業時間管理方策は理論的には不十分であり、今後さらなる議論が必要である。

本章での議論により、軍艦においては COSAL と呼ばれる、ビークルへの搭載品目の策定にあたり、理論的根拠が利用可能となった。経験的な勘によって行われる選定に代わり、論拠に基づく費用対効果に優れる決定を下すことができる。ビークルだけでなく、運用場所で十分な保全資源が確保できない場合にも本章のモデルが適用できる。例えば、コピー機などの事務用機器の商品購入とともに付随するメンテナンスキットの最適化が考えられる。

ただし、正確な最適解の導出には、ORP の正確な推定及び ORP に対する搭載コスト関数の見積もりが必要不可欠である。推定にはこれまでのデータの蓄積が有効であるため、新製品等のデータの少ないシステムへの本章の議論の適用は容易でなく、推定方法に関する研究も同時に行う必要がある。

第5章 管理遅延時間を伴うシステムの最適修理方法の選択

5.1 はじめに

1章でも述べたとおり，管理遅延時間に関する保全方策の研究はこれまで多く行われてきたわけではない．これは，システムが取替え等により再生する間隔に比べ管理遅延時間が十分短い場合が多いため，あるいは管理遅延時間が保全時間と一体として扱われてきたためである．

しかし，管理遅延時間が無視できないほど長い場合や，その特徴が他の保全時間とは異なる場合も存在する．本章では，管理遅延時間を伴うシステムとして，前章でも取り上げた船舶等に搭載されているシステムに着目し，管理遅延時間の費用と稼働率に関するトレードオフを考慮したモデルを提案する．

ビークルに搭載されているシステムに故障が発生した際，特に故障がビークルの運航に影響を及ぼさない場合には，船長等の意思決定者はいくつかの選択肢から最適な修理方法を選択している．前章では，故障を即座に修理できない場合にのみビークルの作業終了後に修理する方法（以下，後日修理という．）が選択されていた．しかし，故障時の状況によっては，例え即座に修理できても後日修理が選択される場合がある．これは，港の岸壁に係留して修理を行う方が容易であったり，必要な保全資源が航海中に比べ安価で取得可能であったりするためである．また，出港直後に発生した故障は，出発した港に一旦帰港し，修理作業を行ってから再度航海を開始することもある．即座に修理できるという選択肢があるにも関わらず，上述のような事由により発生したダウンタイムは管理遅延時間とみなせる．このように，ビークルに搭載されているシステムに発生し得る管理遅延時間は無視できるほど短くなく，かつその期間と修理費用にトレードオフの関係を持っている．しかし，管理遅延時

間のこのような特徴に着目した研究はこれまで行われておらず，修理行動の意思決定を支援する理論的根拠は殆ど無かった．そこで，本章で具体的なモデル化を通じて，意思決定に資する理論的な枠組みを構築することを目指す．

具体的には，システムに故障が発生した際の対処法として，次の３種類を仮定し，故障の発生時刻に応じた最適な選択を行う問題を考える．即ち，(A)実施中の航海等の作業を中断し，作業開始地まで帰投した後修理を行う（帰投修理），(B)修理に必要な予備アイテムや修理人等の保全資源を緊急輸送し，即座に修理を行う（即座修理），及び(C)故障を放置し，作業終了後に修理を行う（後日修理），である．対処法(A)の帰投にはある程度時間が必要であり，対処法(A)，(B)及び(C)による修理時間，並びに対処法(B)による保全資源の輸送にかかる時間は無視できるものとする．対処法(A)及び(C)は，ダウンタイムの発生により稼働率を遡減させる要因となる．なお，前章では故障が発生した際に必要な保全資源がビークルに搭載されている可能性を考えたが，本章では搭載している保全資源は無いものとする（つまり本章での故障は全て前章で定義したタイプ２故障に相当する）．一方修理費用に関しては，補給品の輸送等を伴う対処法(B)が最も高く，次いで追加の岸壁料等のペナルティコストが生じ得る対処法(A)，対処法(C)の順とする．

対処法(A)が選択された際，帰投に必要な時間は，それまでの稼働時間に一致すると考えるのが適当であろう．しかし，修理施設が出発した港以外にも複数存在する場合や，稼働時間と出発地までの距離が比例しない場合も考えられる．このような場合には，故障時刻に依存しない分布を与えることが適当である．前者を基本モデル，後者を独立帰投時間モデルと呼び，それぞれ議論する．

以上のような仮定では，作業開始後間もなく発生した故障は，その後の長期に及ぶ作業に備えて対処法(A)または(B)を，作業終了間近で発生した故障は低コストで修理するため対処法(C)を，それぞれ選択することが適当であると推測できる．よって，対処法を選択する問題は，各対処

法を適用する時間帯を決定する問題に帰着される。

発生した不具合に対する適切な対処法を選択する研究は，ソフトウェア信頼性の分野で“**countermeasure selection**”と呼ばれ，近年注目を浴びている[76][77]．一方，ハードウェアの分野ではマルコフ決定過程を用いた解析が Derman[78]以来盛んに行われている．本章では，最適な時間帯を決定する問題を扱った Tahara and Nishida[79]と同じく，時間帯を表す閾値を設定し，それを最適化する手法を採用する．ビークルの従事する作業の開始から終了までの間システムはある平均アベイラビリティを満たしつつ，ビークルの作業終了までのコストが最小となる時間の幅を最適解とする．

本章でのモデルの概要は表 5.1 のとおりである．5.2 節で，本章で用いる記号を示し，5.3 節と 5.4 節で，ビークルの作業時間がランダムに決まる場合と事前に決まっている場合をそれぞれ取り上げる．なお，システムの故障が CFR のシステムのみを扱う．最後に 5.5 節で本章での成果をまとめる．

表 5.1 提案モデルの概要

節	モデル	概 要
5.3	ランダム作業時間・基本モデル (5.3.2 及び 5.3.3 節)	作業時間が指数分布に従い，帰投にはこれまでの稼働時間と等しい時間が必要と仮定したモデル
	ランダム作業時間・独立帰投時間モデル (5.3.4 節)	作業時間が指数分布に従い，帰投に必要な時間はこれまでの稼働時間とは独立の分布に従うと仮定したモデル
5.4	定時間作業・基本モデル (5.4.2 及び 5.4.3 節)	作業が定時間であり，帰投にはこれまでの稼働時間と等しい時間が必要と仮定したモデル
	定時間作業・独立帰投時間モデル (5.4.4 節)	作業が定時間であり，帰投に必要な時間はこれまでの稼働時間とは独立の分布に従うと仮定したモデル

5.2 記 号

本章では，以下の記号を用いる．

$G(x)$ ：ビークルの作業時間分布， $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ ($\lambda>0$)

T ：固定された作業時間

h ：故障率

$F(t)$ ：システムの故障分布関数， $F(t)=1-e^{-ht}$ ($h>0$)

$f(t)$ ：故障確率密度関数， $dF(t)/dt$

C_1 ：ペナルティコストを含んだ1回当たりの帰投修理コスト

C_2 ：保全資源の輸送コストを含んだ1回当たりの即座修理コスト

C_3 ：1回当たりの後日修理コスト

τ_1 ：帰投修理が選択される期間を表す閾値

τ_2 ：即座修理が選択される期間を表す閾値

$A(\tau_1, \tau_2)$ ：1作業中のシステムの平均アベイラビリティ（基本モデル）

$\tilde{A}(\tau_1, \tau_2)$ ：1作業中のシステムの平均アベイラビリティ（独立帰投時間モデル）

α ：目標平均アベイラビリティ

$C_V(\tau_1, \tau_2)$ ：1作業終了までの平均コスト

P_1 ：1作業中に帰投修理が発生する確率

N_2 ：1作業中の即座修理の回数の期待値

P_3 ：1作業中に後日修理が発生する確率

T_V ：1作業の完了に要する時間の期待値

D_V ：1作業中のダウンタイムの期待値

δ ：帰投に要する時間の期待値（独立帰投時間モデル）

Φ^* ：変数 Φ の最適値

5.3 作業時間がランダムの場合

本節では，ビークルの航海等の作業時間が確率変数に従う場合を考える．これは，作業の所要時間が正確には予測できないことを意味する．作業時間分布として指数分布を仮定し議論を進めるが，他の分布に従う場合にも同様の仮定で定式化が可能である．

次小節以降，本節での仮定，帰港に要する時間がそれまでの経過時間と等しい基本モデルにおける目的関数の導出，その挙動を説明し，5.3.4で独立帰投時間モデルを議論する．その後数値例を紹介する．

5.3.1 仮 定

本節での仮定は以下のとおりである．

- (1) あるビークルは時刻 0 から期間が $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ ($\lambda>0$) に従う作業(航海等)を開始する．同じ時刻にビークルに搭載されている対象のシステムは稼働し始める．システムはビークルの作業中稼働することが求められる．
- (2) システムの故障は指数分布 $F(t)=1-e^{-ht}$ ($h>0$) に従い発生する．
- (3) システムの故障の発生とビークルの作業の完了は独立である．
- (4) 故障への対処は，(A)作業を中断し，作業の出発地等へ帰投し修理を行う，(B)即座に修理を行う，(C)作業中は故障を放置し，作業終了後に修理を行う，のうち一つが選択される．2つの閾値 τ_1 及び τ_2 を導入し，故障が発生した時刻 t に対し， $t<\tau_1$ のとき対処法(A)が， $\tau_1<t<\tau_1+\tau_2$ のとき対処法(B)が， $\tau_1+\tau_2<t$ のとき対処法(C)がそれぞれ選択される．システムの故障により，ビークルが作業を遂行することができなくなる確率は無視できる．
- (5) 対処法(A)が選択されたならば，ビークルはある時間をかけて帰投し，システムの修理の後作業を初めから再開する．基本モデルで

は、帰投にかかる時間がこれまでの稼働時間 t と等しいとし、独立帰投時間モデルでは、この時間が従う分布の期待値 $\delta(0 < \delta < \infty)$ が与えられるとする。

- (6) 対処法(A), (B)及び(C)による1回当たりの修理コストはそれぞれ C_1, C_2 及び C_3 である。これらのコストは補給品の輸送等修理に関連する全ての費用を含み、 $C_3 \leq C_1 < C_2$ を満たす。また、修理作業に必要な時間は無視できる。

以上の仮定の下、システムの平均アベイラビリティ $A(\tau_1, \tau_2)$ (独立帰投時間モデルでは $\tilde{A}(\tau_1, \tau_2)$) が目標アベイラビリティ α ($0 < \alpha \leq 1$) を満たしつつ、1回の作業終了までの平均コスト $C_V(\tau_1, \tau_2)$ が最小となる (τ_1, τ_2) の組み合わせを決定する。

図 5.1 と図 5.2 に、故障が時刻 τ_1 以降に発生する場合と基本モデルにおいて故障が時刻 τ_1 以前に発生する場合のシステムの状態推移をそれぞれ示す。

図 5.1 では、対処法(B)が選択される時間帯に発生した故障はすべて即座に修理され、ダウンタイムは発生していない。一方、対処法(C)が選択される時間帯で発生した故障は作業中放置され、ダウンタイム（管理遅延時間）が発生している。このため、対処法(C)が1回の作業で選択される回数は高々1回である。基本モデルを表す図 5.2 では、対処法(A)が選択される時間帯の時刻 t で故障が発生し、同じ時間 t だけかけて帰投し、修理後に再度作業が開始されている。修理後の作業においても、その開始後 τ_1 までは対処法(A)が選択される。

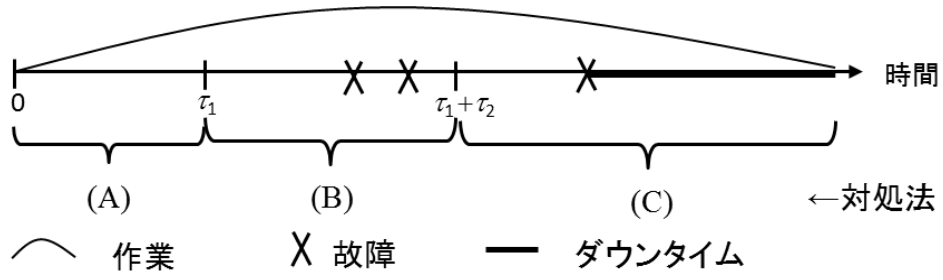


図 5.1 時刻 τ_1 以降に故障が発生する場合の状態推移

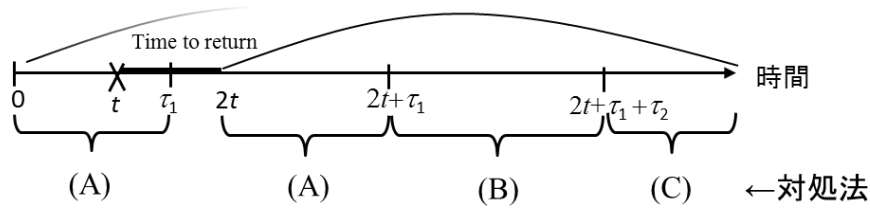


図 5.2 時刻 τ_1 以前に故障が発生する場合の状態推移（基本モデル）

5.3.2 目的関数の導出

本節では，基本モデルにおける目的関数である平均アベイラビリティ及び平均コストを導出する．簡単のため，以後の時間は最新の作業開始時（対処法(A)による修理完了時を含む）を 0 とする時間軸を考える．

対処法(A)が選択される故障が発生する確率を P_1 とすると，これは τ_1 までに故障が発生する確率であり，作業時間と τ_1 との大小関係により場合分けすることで式(5.1)のように計算できる．

$$P_1 = \int_{\tau_1}^{\infty} F(\tau_1) dG(x) + \int_0^{\tau_1} F(x) dG(x) = \frac{h}{h + \lambda} \{1 - e^{-(h + \lambda)\tau_1}\} \quad (5.1)$$

次に，対処法(B)により修理される故障の平均発生回数 N_2 は時間間隔 $(\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$ で発生する故障回数の期待値であり，次式で表される．

$$N_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} h \cdot (x - \tau_1) dG(x) + \int_{\tau_1 + \tau_2}^{\infty} h \tau_2 dG(x) = \frac{h}{\lambda} \{e^{-\lambda\tau_1} - e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)}\} \quad (5.2)$$

対処法(C)が選択される故障の発生確率を P_3 とすると、これは時刻 $\tau_1 + \tau_2$ 以降に故障が発生する確率と等しいから、次式となる。

$$P_3 = \int_{\tau_1 + \tau_2}^{\infty} (1 - \exp[-h\{x - (\tau_1 + \tau_2)\}])dG(x) = \frac{h}{h + \lambda} e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} \quad (5.3)$$

対処法(A)が選択される故障の発生時刻の期待値を T_r とする⁴と、次式となる。

$$T_r = \int_0^{\tau_1} \int_0^x t dF(t) dG(x) + \int_{\tau_1}^{\infty} \int_0^{\tau_1} t dF(t) dG(x) = \frac{h}{(h + \lambda)^2} [1 - \{1 + (h + \lambda)\tau_1\}e^{-(h + \lambda)\tau_1}] \quad (5.4)$$

式(5.4)は、作業開始から作業完了または帰投までに発生する帰投時間の期待値に一致する。対処法(A)による修理後、ビークルの作業とシステムの状態は時刻 0 の時点に再生するから、1 回の作業完了にかかる時間の期待値 T_v は、対処法(A)による出発地への往復時間と、対処法(A)が実施されない場合の航海時間 $1/\lambda$ の和で表されるので、 T_r を用いて次式で表される。

$$T_v = (2T_r + 2T_r P_1 + 2T_r P_1^2 + \cdots) + \frac{1}{\lambda} = \frac{2T_r}{1 - P_1} + \frac{1}{\lambda} \quad (5.5)$$

なお、式(5.5)の括弧内は、 n 回目 ($n \geq 1$) の出発が発生する確率 P_1^{n-1} と n 回目の出発後、次に発生し得る対処法(A)による往復時間の期待値 $2T_r$ の積の級数を表す。また、式(5.1)より $P_1 < 1$ である、対処法(C)を選択した際のダウンタイムの期待値は指数分布の無記憶性により $1/\lambda$ となる。よって、作業が完了するまでに発生するダウンタイムの期待値 D_v は、式(5.5)

⁴ T_r は対処法(A)により修理される故障が発生するという条件を付帯していない。つまり時間間隔 $(0, \tau_1)$ で故障が発生しない場合は 0、時間間隔 $(0, \tau_1)$ 内の時刻 t で故障が発生する場合は t となる確率変数の期待値である。よって、 T_r はビークルが作業を開始してから作業を完了するまたは対処法(A)の選択により帰投するまでに発生する帰投時間の期待値に一致する。

同様 T_r を用いて次式となる．

$$D_v = (T_r + P_1 T_r + P_1^2 T_r + \cdots) + \frac{P_3}{\lambda} = \frac{T_r}{1 - P_1} + \frac{P_3}{\lambda} \quad (5.6)$$

以上より，平均アベイラビリティ及び平均コストはそれぞれ式(5.7)及び(5.9)で計算できる．

$$A(\tau_1, \tau_2) = 1 - \frac{D_v}{T_v} = \frac{S(\tau_1) - h e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} + h + \lambda}{2S(\tau_1) + h + \lambda} \quad (5.7)$$

ただし，

$$S(\tau_1) = \frac{h\lambda[1 - \{1 + (h + \lambda)\tau_1\}e^{-(h+\lambda)\tau_1}]}{\lambda + h e^{-(h+\lambda)\tau_1}} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} C_v(\tau_1, \tau_2) &= \{P_1(1 - P_1) + 2P_1^2(1 - P_1) + \cdots\}C_1 + N_2 C_2 + P_3 C_3 \\ &= P_1 C_1 / (1 - P_1) + N_2 C_2 + P_3 C_3 \\ &= \frac{h\{1 - e^{-(h+\lambda)\tau_1}\}}{\lambda + h e^{-(h+\lambda)\tau_1}} C_1 + \frac{h}{\lambda} \{e^{-\lambda\tau_1} - e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)}\} C_2 + \frac{h}{h + \lambda} e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} C_3 \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.3.3 目的関数の挙動

本節では，前節で求めた平均アベイラビリティ及び平均コストの挙動について議論する．5.3.3.1 及び 5.3.3.2 節でそれぞれコスト及びアベイラビリティについて解析する．続いて 5.3.3.3 節で一部の対処法しか選択されない特殊な例について説明する．

5.3.3.1 平均コスト

ここでは，コストの挙動を明らかにすることで，目標平均アベイラビリティを満たす τ_1, τ_2 の範囲が与えられた際に，コストが最小となる大域

的最適解を得ることを保証する．

まず， τ_2 に関して微分すると，

$$\frac{\partial C_V(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = h e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} \left(C_2 - \frac{\lambda}{h + \lambda} C_3 \right) > 0 \quad (5.10)$$

となり，単調増加することがわかる．

次に， τ_1 に関しては，次の結果を得た（付録 J 参照）．

$$(イ) \quad \tau_2 < -\frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{C_2 - C_1}{C_2 - \lambda C_3 / (h + \lambda)} \right\} \text{ のとき}$$

コストは極大値を唯一もつ単峰関数となる．

$$(ロ) \quad -\frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{C_2 - C_1}{C_2 - \lambda C_3 / (h + \lambda)} \right\} \leq \tau_2 < -\frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{C_2 - KC_1}{C_2 - \lambda C_3 / (h + \lambda)} \right\} \text{ のとき}$$

ただし，条件式中の K は次式で定義される．

$$K \equiv \frac{1}{4} \left(2 + \frac{h}{\lambda} \right)^{\frac{h+2\lambda}{h+\lambda}} \quad (5.11)$$

コストは $C_2/C_1 \leq K$ を満たすとき，始めは減少し，次に増加し，最後に再び減少する（減少・増加・減少型）． $C_2/C_1 > K$ のとき，単調減少する．

$$(ハ) \quad -\frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{C_2 - KC_1}{C_2 - \lambda C_3 / (h + \lambda)} \right\} \leq \tau_2 \text{ のとき}$$

コストは単調減少する．

以上の結果をまとめると図 5.3 となる．

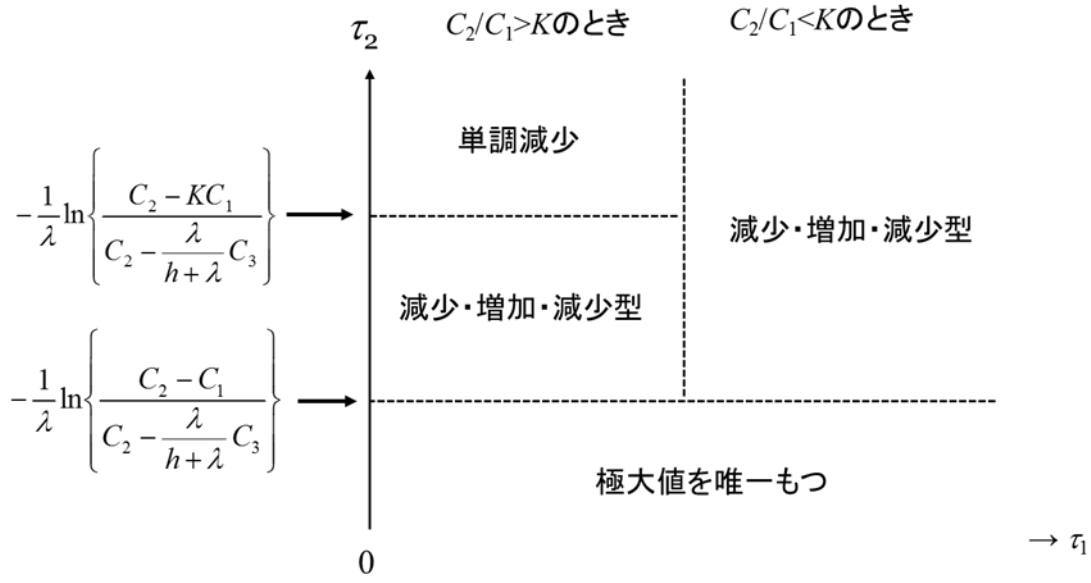


図 5.3 τ_1 に関する平均コストの挙動

5.3.3.2 平均アベイラビリティ

平均アベイラビリティが τ_2 に関して単調増加するのは式(5.7)から明らかである．一方， τ_1 方向への微分は

$$\frac{\partial A(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = \frac{e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} [2h\lambda S(\tau_1) + \{2h - (h + \lambda)e^{\lambda(\tau_1 + \tau_2)}\} S'(\tau_1) + h\lambda(h + \lambda)]}{\{2S(\tau_1) + h + \lambda\}^2} \quad (5.12)$$

となる．ここで， $S(\tau_1)$ の極限值は $S(0)=0$ 及び $S(\infty)=h$ であり， $S(\tau_1)$ の微分は

$$S'(\tau_1) = \frac{h\lambda(h + \lambda)e^{-(h+\lambda)\tau_1}}{\{\lambda + he^{-(h+\lambda)\tau_1}\}^2} [h\{1 - e^{-(h+\lambda)\tau_1}\} + \lambda(h + \lambda)\tau_1] \quad (5.13)$$

となる．また， $S'(0)=0$ であるから，

$$\left. \frac{\partial A(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \right|_{\tau_1=0} = \frac{h\lambda}{h + \lambda} e^{-\lambda\tau_2} > 0 \quad (5.14)$$

が成り立つ．つまり， $\tau_1=0$ のときのアベイラビリティの傾きは常に正となる．式(5.12)が 0 となる方程式

$$2\lambda h S(\tau_1) + \{2h - (h + \lambda)e^{\lambda(\tau_1 + \tau_2)}\} S'(\tau_1) = -h\lambda(h + \lambda) \quad (5.15)$$

の左辺は， $\tau_1=0$ のとき 0， $\tau_1=\infty$ のとき $S'(\infty)=0$ より $2h^2\lambda$ となり，いずれも右辺よりも大きい．よって， $S(\tau_1)$ の連続性から式(5.15)は零個もしくは偶数個の解をもつ．また，式(5.12)の $S'(\tau_1)$ の係数に着目すると，少なくとも

$$\tau_1 < -\tau_2 - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{h + \lambda}{2h}\right) \quad (5.16)$$

の範囲でアベイラビリティは増加する．ただし，式(5.16)を満たす τ_1 は必ずしも存在しない．なお， $A(0, \tau_2) = A(\infty, \tau_2)$ の解 $\hat{\tau}_2$ は唯一存在し，

$$\hat{\tau}_2 = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{h + \lambda}{3h + \lambda}\right) \quad (5.17)$$

である．よって， $\tau_2 > \hat{\tau}_2$ のとき $A(0, \tau_2) < A(\infty, \tau_2)$ となりアベイラビリティは必ず正で有限の τ_1 で最大値をとる．なお，式(5.17)は $0 < \hat{\tau}_2 < (\ln 3)/\lambda$ を満たす．

アベイラビリティについては， τ_2 に関する単調増加性は確認できたものの， τ_1 に関する挙動についてはコストの結果と異なり単純な形式で表現できていない．

5.3.3.3 特殊例の解析

ここでは，変数 τ_1 または τ_2 が 0 または ∞ となる特殊な場合についての解析結果を簡単に説明する．なお，本節での証明は前節と重複するため割愛する．

(a) $\tau_1=0$ のとき

対処法(B)または(C)が常に選択される．アベイラビリティ及びコス

トはそれぞれ

$$A(0, \tau_2) = 1 - \frac{h}{h + \lambda} e^{-\lambda \tau_2} \quad (5.18)$$

$$C_v(0, \tau_2) = \frac{h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \tau_2}) C_2 + \frac{h}{h + \lambda} e^{-\lambda \tau_2} C_3 \quad (5.19)$$

となり, 双方 τ_1 に関して単調増加する. よって, 最適解 τ_2^* は $A(0, \tau_2^*) = \alpha$ を満たすので, $\alpha < 1$ のとき

$$\tau_2^* = -\frac{1}{\lambda} \ln \left\{ (1 - \alpha) \left(1 + \frac{\lambda}{h} \right) \right\} \quad (5.20)$$

であり, $\alpha = 1$ のとき $\tau_2^* = \infty$ である. このときのコストは

$$C_v(0, \tau_2^*) = \left\{ \frac{h + \lambda}{\lambda} \alpha - 1 \right\} C_2 + (1 - \alpha) C_3 \quad (5.21)$$

となる.

(b) $\tau_1 = \infty$ のとき

故障は全て対処法(A)で除去される. アベイラビリティ及びコストはそれぞれ定数で,

$$A(\infty, \tau_2) = \frac{2h + \lambda}{3h + \lambda} \quad (5.22)$$

$$C_v(\infty, \tau_2) = \frac{h}{\lambda} C_1 \quad (5.23)$$

となる. 式(5.22)は h と λ の比に応じ $2/3$ から 1 の値をとる.

(c) $\tau_2 = 0$ のとき

対処法(A)または(C)が常に選択される. アベイラビリティ及びコス

トはそれぞれ

$$A(\tau_1, 0) = \frac{S(\tau_1) - he^{-\lambda\tau_1} + h + \lambda}{2S(\tau_1) + h + \lambda} \quad (5.24)$$

$$C_V(\tau_1, 0) = \frac{h\{1 - e^{-(h+\lambda)\tau_1}\}}{\lambda + he^{-(h+\lambda)\tau_1}} C_1 + \frac{h}{h + \lambda} e^{-\lambda\tau_1} C_3 \quad (5.25)$$

となる．アベイラビリティの挙動は一意に定まらない一方，コストは極大値を唯一もつ単峰関数となる．

(d) $\tau_2 = \infty$ のとき

対処法(A)または(B)が常に選択される．アベイラビリティ及びコストはそれぞれ

$$A(\tau_1, \infty) = \frac{S(\tau_1) + h + \lambda}{2S(\tau_1) + h + \lambda} \quad (5.26)$$

$$C_V(\tau_1, \infty) = \frac{h\{1 - e^{-(h+\lambda)\tau_1}\}}{\lambda + he^{-(h+\lambda)\tau_1}} C_1 + \frac{h}{\lambda} e^{-\lambda\tau_1} C_2 \quad (5.27)$$

となる．アベイラビリティは単調減少する．コストは $C_2/C_1 < K$ を満たすとき減少・増加・減少型となり，満たさないとき単調減少する．

5.3.4 独立帰投時間モデル

対処法(A)が選択された際，帰投に必要な時間が，故障時刻とは独立の，正で有限の期待値 δ をもつ一般分布に依存すると仮定する．この場合，作業完了までのコストは基本モデルと等しい．そこで，本小節では平均アベイラビリティについて解析する．ここで独立帰投時間モデルのアベイラビリティの挙動が数学的に明らかとなることで，5.3.3節の結果と併せて α が与えられた際に大域的最適解を得ることが保証できる．

対処法(A)が選択される故障の発生時刻の期待値 \tilde{t}_r は δP_1 と等しい．こ

れを用いると，独立帰投時間モデルにおけるアベイラビリティ $\tilde{A}(\tau_1, \tau_2)$ は，次式で表される．

$$\tilde{A}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\tilde{S}(\tau_1) - h e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} + h + \lambda}{2\tilde{S}(\tau_1) + h + \lambda} \quad (5.28)$$

ただし，

$$\tilde{S}(\tau_1) = h\lambda(h + \lambda)\delta \cdot \frac{1 - e^{-(h+\lambda)\tau_1}}{\lambda + h e^{-(h+\lambda)\tau_1}} \quad (5.29)$$

である．

以下，5.3.4.1節で平均アベイラビリティ関数の挙動を，5.3.4.2節で特殊例について説明する．

5.3.4.1 平均アベイラビリティの挙動

基本モデルと同様， τ_2 に関しては単調増加する．一方， τ_1 に関する微分は式(5.12)右辺における $S(\tau_1)$ 及び $S'(\tau_1)$ をそれぞれ $\tilde{S}(\tau_1)$ 及び $\tilde{S}'(\tau_1)$ に変更した式となる．これを解析することで， τ_1 に関するアベイラビリティの挙動について， τ_2 の値に応じて以下の場合に分類される(付録K参照)．

$$(イ) \quad \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h+1/\delta}{h+\lambda} \right) < \tau_2 \text{ のとき}$$

アベイラビリティは極小値を唯一もつ単峰関数となる．

$$(ロ) \quad \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h}{h+\lambda} \right) + \frac{1}{h+\lambda} \ln \left(\frac{\lambda}{h+2\lambda} \right) < \tau_2 < \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h+1/\delta}{h+\lambda} \right) \text{ のとき}$$

アベイラビリティは，

$$\tau_2 < \frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{\frac{4(h+1/\delta)}{2\lambda+h} + \frac{2h}{\lambda}}{\left(1 + \frac{h}{\lambda}\right) \left(2 + \frac{h}{\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{h+\lambda}}} \right\} \quad (5.30)$$

ならば単調増加となり，それ以外なら増加・減少・増加型となる．式(5.30)を満たす τ_2 は， $\delta \leq 1/\lambda$ または $h > 1.0865\lambda$ のとき，必ず存在する（付録L参照）．なお， $\delta \leq 1/\lambda$ または $h \geq \lambda$ のとき条件（ロ）右辺の真数は正となるので，条件（ロ）を満たす τ_2 は必ず存在する．

(ハ) $\tau_2 < \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h}{h+\lambda} \right) + \frac{1}{h+\lambda} \ln \left(\frac{\lambda}{h+2\lambda} \right)$ のとき

アベイラビリティは単調増加となる．なお， $h < 2.9769\lambda$ のとき，条件（ハ）を満たす τ_2 は存在しない（付録M参照）．

以上の結果をまとめると図5.4となる．

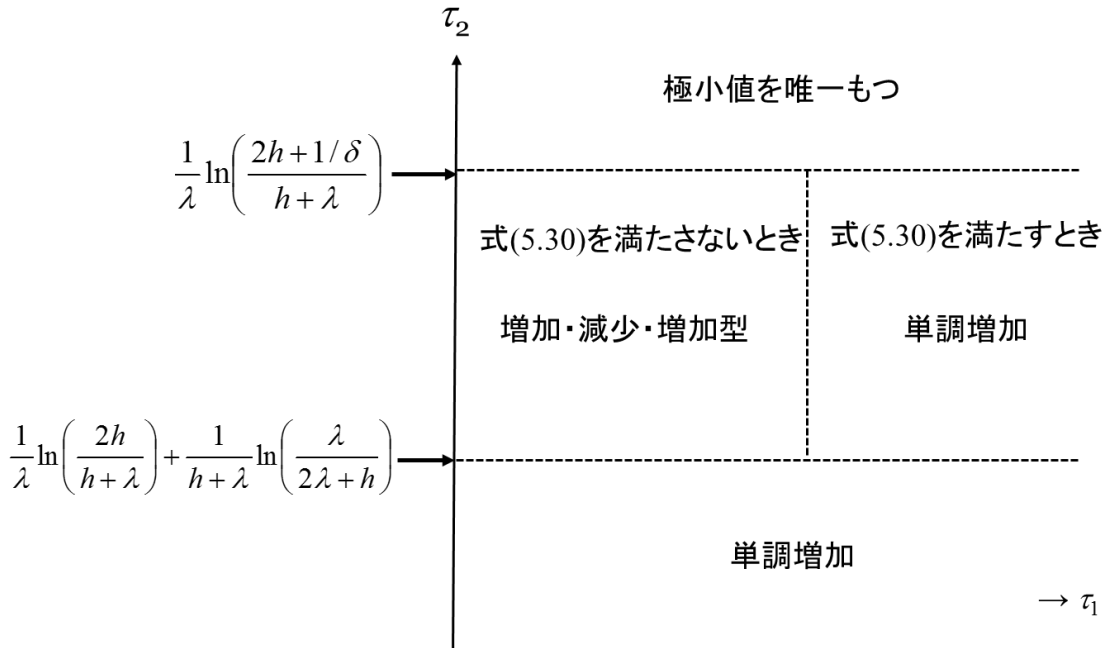


図5.4 τ_1 に関する平均アベイラビリティ（独立帰投時間モデル）の挙動

5.3.4.2 特殊例の解析

以下に特殊例におけるアベイラビリティについて簡単に説明する.

(a) $\tau_1=0$ のとき, 5.3.3.3節(a)と一致する.

(b) $\tau_1=\infty$ のとき

$$\tilde{A}(\infty, \tau_2) = \frac{h\delta + 1}{2h\delta + 1} \quad (5.31)$$

となり, $h\delta$ の値に応じ1/2から1までの値をとる.

(c) $\tau_2=0$ のとき

$$\tilde{A}(\tau_1, 0) = \frac{\tilde{S}(\tau_1) - he^{-\lambda\tau_1} + h + \lambda}{2\tilde{S}(\tau_1) + h + \lambda} \quad (5.32)$$

となり, その挙動は5.3.4.1節の条件により判別される.

(d) $\tau_2=\infty$ のとき

$$\tilde{A}(\tau_1, \infty) = \frac{\tilde{S}(\tau_1) + h + \lambda}{2\tilde{S}(\tau_1) + h + \lambda} \quad (5.33)$$

となり,

$$\tilde{A}'(\tau_1, \infty) = -\frac{(h + \lambda)\tilde{S}'(\tau_1)}{\{2\tilde{S}(\tau_1) + h + \lambda\}^2} < 0 \quad (5.34)$$

より単調減少する.

5.3.5 数値例

本小節では, コスト及びアベイラビリティの計算結果を示し, 最適解

について説明する．初めに基本モデルの結果を示し，次に独立帰投時間モデルの結果を示す．

計算に用いるパラメータを $\lambda=1$, $h=1$, $C_1=2$, $C_2=3$ 及び $C_3=1$ とする．図 5.5 から 5.9 に，基本モデルにおける平均コスト関数 $C_V(\tau_1, \tau_2)$ 及び平均アベイラビリティ関数 $A(\tau_1, \tau_2)$ をそれぞれ示す．

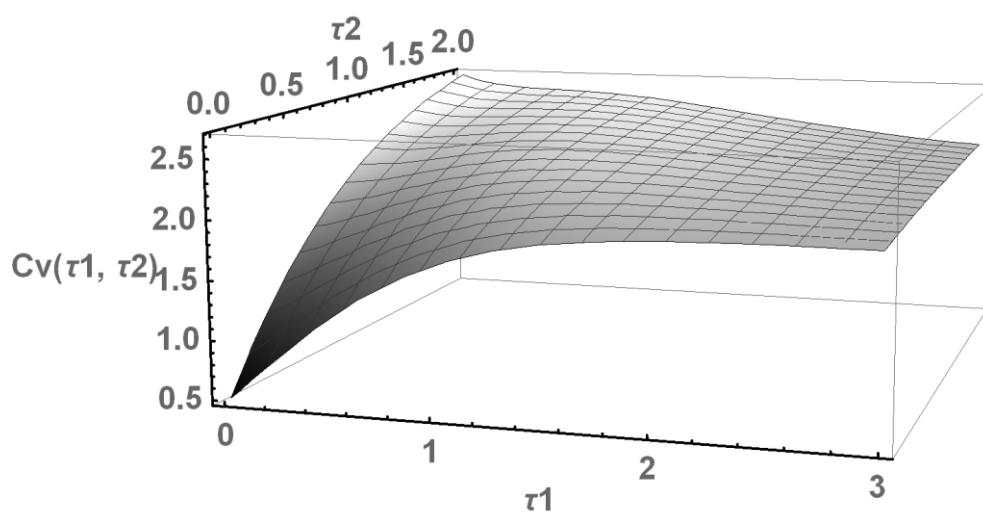


図 5.5 平均コスト関数（3次元図）

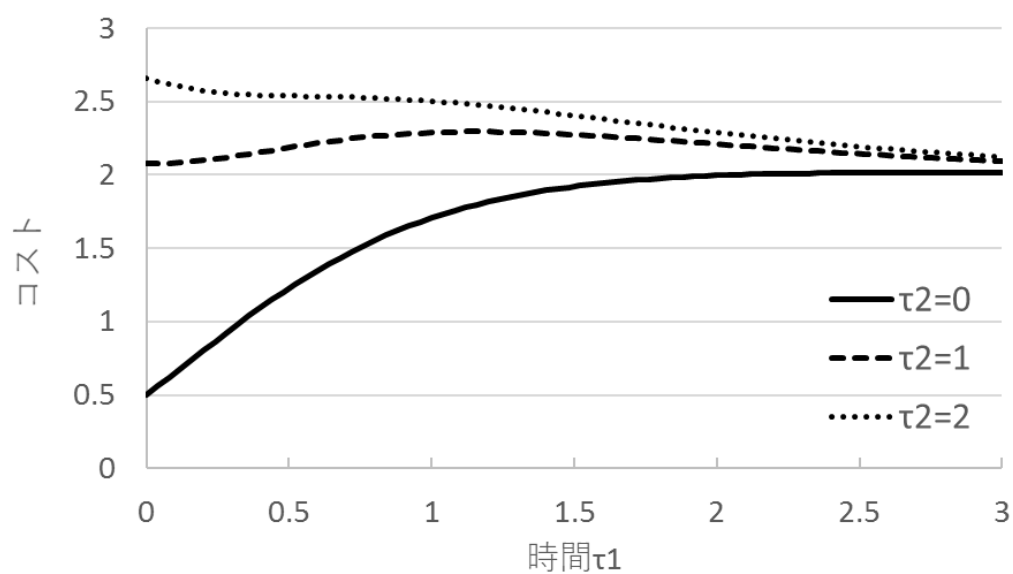


図 5.6 平均コスト関数 (2次元図)

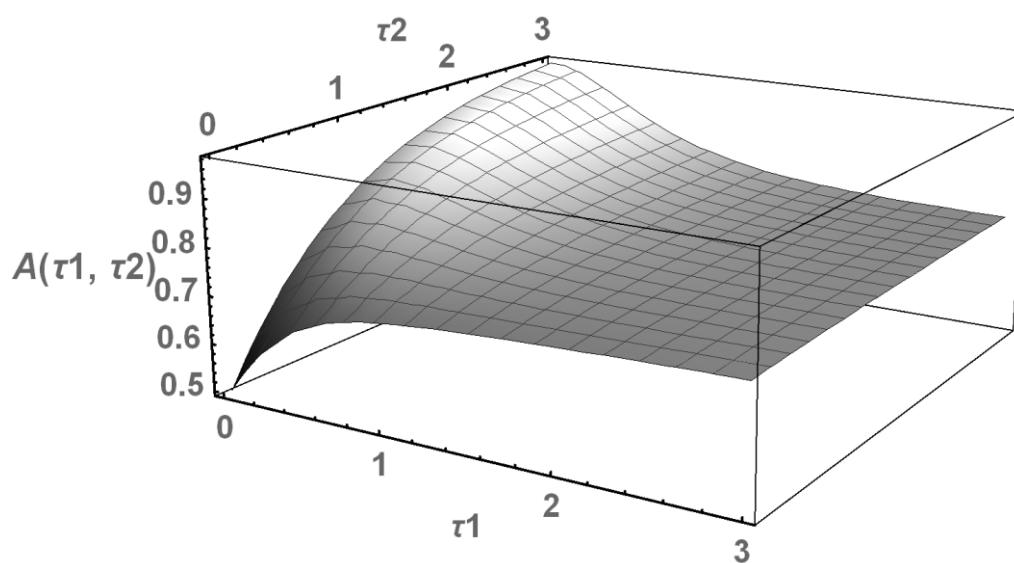


図 5.7 基本モデルの平均アベイラビリティ関数 (3次元図)

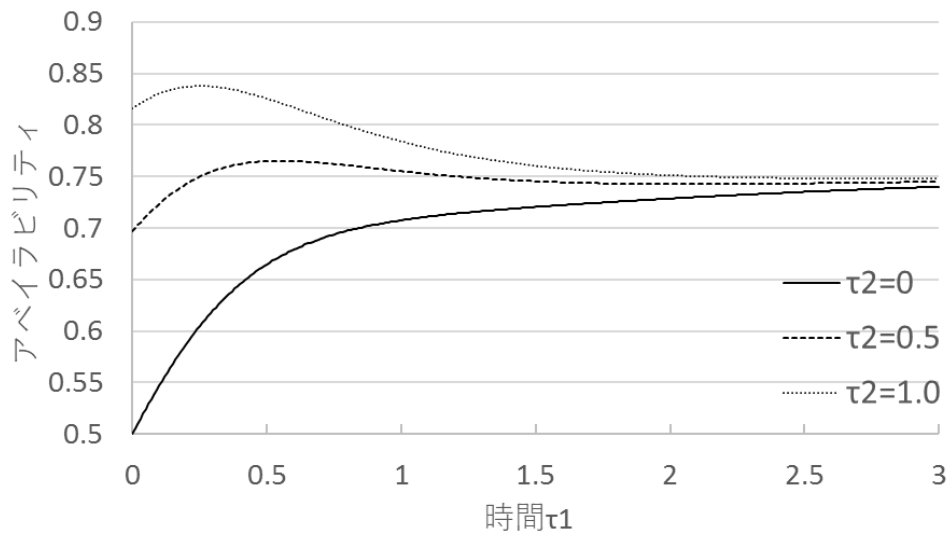


図 5.8 基本モデルの平均アベイラビリティ関数（2次元図）

図 5.5 と図 5.6 から，コストは $\tau_2=0$ のとき単峰となっており， $\tau_1=2.76$ で最大値 2.0157 をとっていることが分かる．また， τ_1 が十分大きくなると $C_V(\infty, \tau_2)=2$ に収束している． τ_2 が増加するにつれ極値を 2 個もつ形，単調減少へと遷移する．その境界は， $\tau_2=0.92$ と $\tau_2=1.83$ である（付録 J の式(J.9)は成り立たない）．なお， $\tau_2=1$ のとき， $\tau_1=0.04$ で極小値 2.0787， $\tau_1=1.16$ で極大値 2.2942 をとっている．このように平均コスト関数が 3 種類の形状をもつ理由は，式(5.9)最右辺の C_1 の係数の正の傾きと， C_2 ， C_3 の係数の負の傾きの増減速度の違いによるといえる．

図 5.7 と図 5.8 では， $\tau_2=0$ のときアベイラビリティは単調増加する一方， $\tau_2>0$ のときは極値が 2 個以上存在しているようである．例えば， $\tau_2=1$ のとき， $\tau_1=0.25$ で極大値 0.8378， $\tau_2=2.90$ で極小値 0.7479 をとっている．ただし， λ が h に比べて大きくなると， $\tau_2=0$ でも極値をもつ形になる． λ の値を 5 に変更した場合の， τ_1 に関するアベイラビリティの推移を図 5.9 に示す．

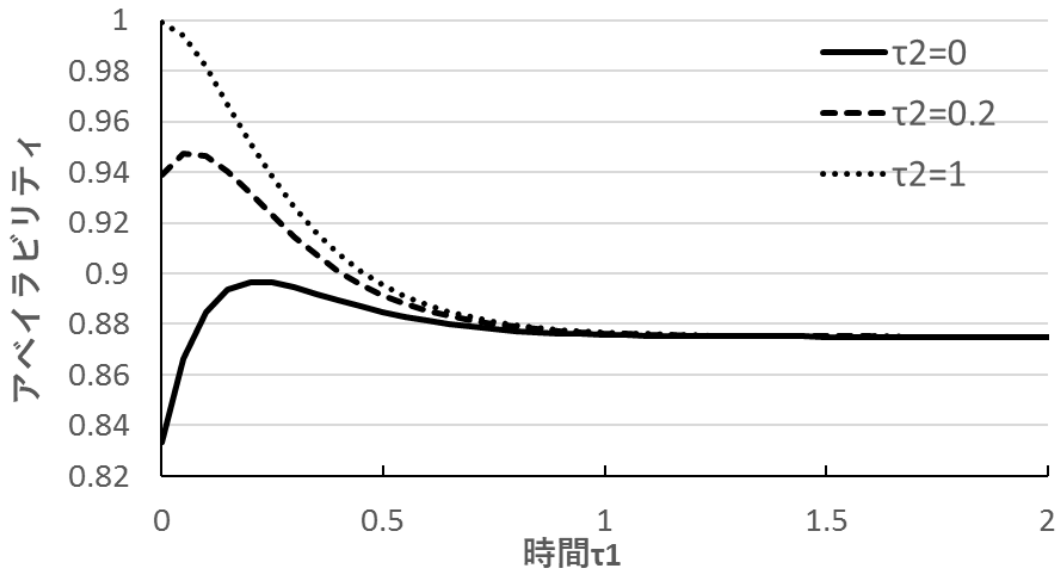


図 5.9 アベイラビリティの推移($\lambda=5$)

τ_1 によるアベイラビリティの変化について考察する． τ_1 が微小量だけ増加するとき，時刻 τ_1 直後で発生した故障に対し選択される対処法は(B)から(A)に変更され，時刻 $\tau_1 + \tau_2$ 直後で発生する故障に対し選択される対処法は(C)から(B)へ変更される．後者によるダウンタイムの減少量の期待値は，時刻 $\tau_1 + \tau_2$ での故障確率密度 h ，その時点で作業が終了していない確率及び当該故障が発生した条件下でのダウンタイムの期待値 $1/\lambda$ の積で表される．作業の未完了確率は τ_1 の増加とともに減少するので，全体の値（3つの値の積）も減少する．一方，前者によるダウンタイムの増分は $\tau_1 \cdot f(\tau_1)$ と作業の未完了確率の積で表される．この値は τ_1 の増加とともに増加したのち減少する．しかし， τ_1 の変更は平均作業完了時刻 T_v へも作用するため，アベイラビリティ全体へ与える影響を評価することは容易ではない．とは言え，アベイラビリティが τ_1 とともに増加する範囲では，前者の利益が後者の不利益を上回っていることを意味している．

次に，目標アベイラビリティ $\alpha=0.75$ とし，最適解を求める． $C_1=2$, $C_3=1$ 及び $\lambda=1$ のとき，いくつかの C_2 と h による最適解の組 (τ_1^*, τ_2^*) 及びそのときのコストを表 5.2 及び 5.3 に示す．ただし，表中の“N/A”は $\tau_1^* = \infty$ で

あるため τ_2 の最適解が存在しないことを意味する．

表 5.2 修理コスト C_2 による最適解の推移 ($h=0.5, 1.0$)

$C_2 \backslash h$	0.5			1.0		
	τ_1^*	τ_2^*	コスト	τ_1^*	τ_2^*	コスト
3	0.3355	0.0000	0.5420	0.2283	0.5134	1.6457
4	0.3355	0.0000	0.5420	0.3856	0.4396	1.9218
5	0.3355	0.0000	0.5420	∞	N/A	2.0000
6	0.3355	0.0000	0.5420	∞	N/A	2.0000

表 5.3 修理コスト C_2 による最適解の推移 ($h=1.5, 2.0$)

$C_2 \backslash h$	1.5			2.0		
	τ_1^*	τ_2^*	コスト	τ_1^*	τ_2^*	コスト
3	0.1578	0.7542	2.7627	0.1204	0.8895	3.8833
4	0.2640	0.7124	3.3903	0.1999	0.8615	4.8733
5	0.3430	0.7015	3.9499	0.2579	0.8577	5.7887
6	0.4056	0.7048	4.4700	0.3029	0.8646	6.6600

$h=1.0$ のとき， C_2 が増加すると対処法(A)のみ選択する方策が最適となっている．これは， C_2 が比較的小さい値のときの最適解(τ_1^*, τ_2^*)付近でのコストが， C_2 増加につれ式(5.23)を上回るためである．よって，この現象は式(5.22)が α 以上となる比較的故障率の小さい場合に起こり得る．また， $h=0.5$ のときは $\tau_2=0$ が最適となっている．その他の場合では， C_2 の増加とともに τ_1^* が増加し， τ_2^* はそれほど変化していない．表で示された範囲では， τ_1 増加によるアベイラビリティの増加が τ_2 増加によるものより低コストで行えることを意味している．また，故障率 h が増加するとき， τ_1^* は減少する一方， τ_2^* は増加することが観察できる．最適コストも増加している．

次に、 $h=\lambda=1$ 、 $\delta=0.3$ のときの独立帰投時間モデルの平均アベイラビリティ関数 $\tilde{A}(\tau_1, \tau_2)$ を図 5.10 及び 5.11 に示す．また、 $\delta=0.6$ の場合の $\tilde{A}(\tau_1, \tau_2)$ を図 5.12 及び 5.13 に示す．

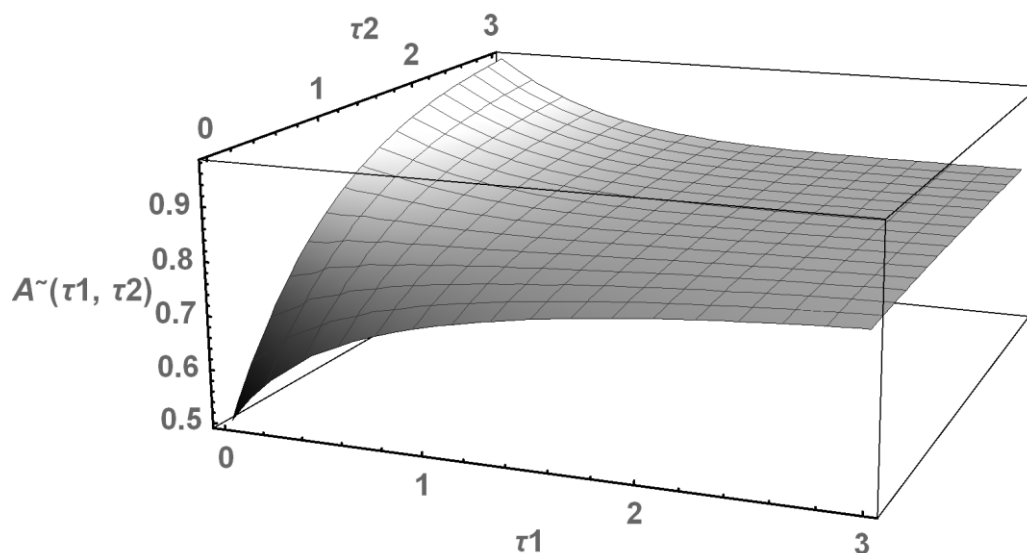


図5.10 独立帰投時間モデルの平均アベイラビリティ関数
($\delta=0.3$ ，3次元図)

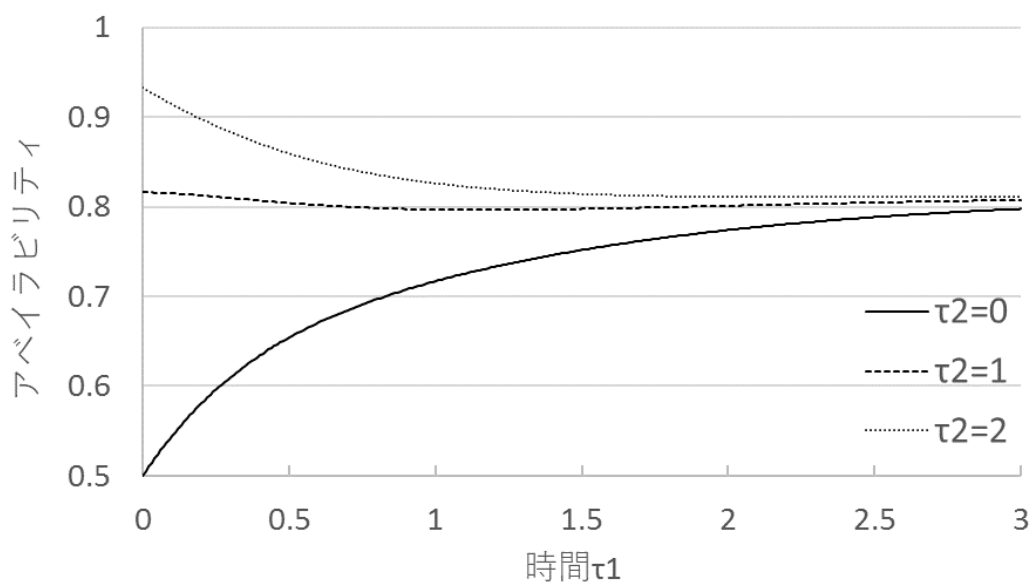


図5.11 独立帰投時間モデルの平均アベイラビリティ関数
($\delta=0.3$ ，2次元図)

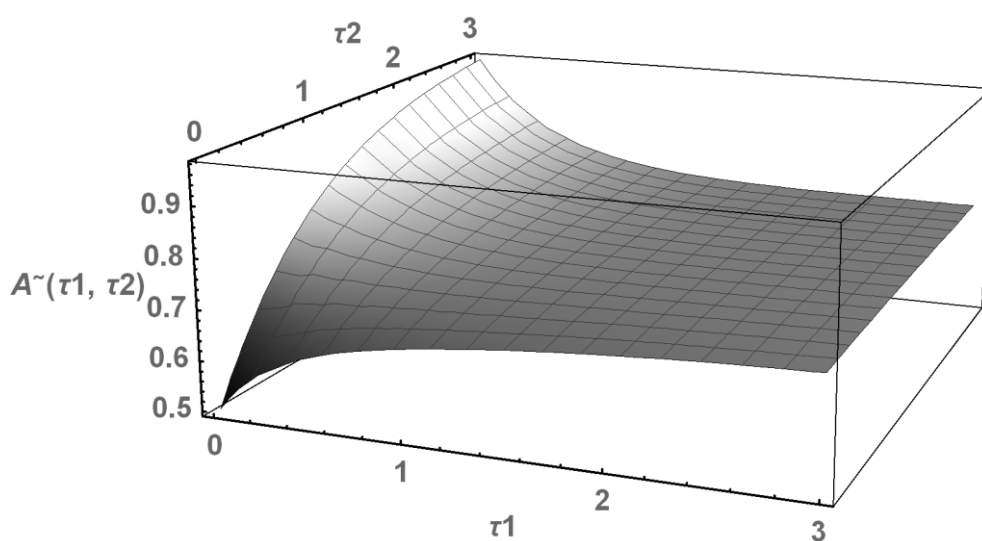


図5.12 独立帰投時間モデルの平均アベイラビリティ関数
($\delta=0.6$, 3次元図)

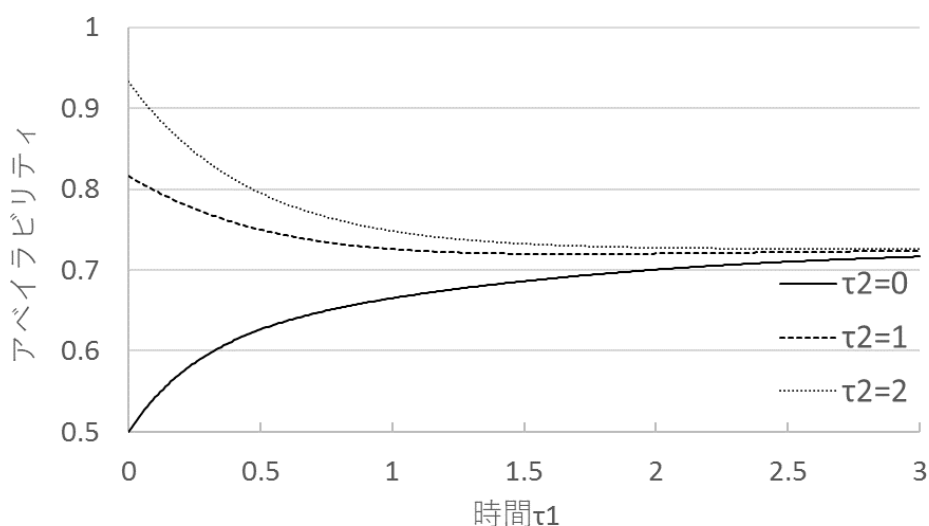


図5.13 独立帰投時間モデルの平均アベイラビリティ関数
($\delta=0.6$, 2次元図)

図5.10, 5.11と図5.7, 5.8を比較すると，独立帰投時間モデルでは， τ_2 が比較的大きい領域で，アベイラビリティが τ_1 に関して減少傾向をもつことが分かる．5.3.4.1節における（イ）の条件は $\tau_2 > 0.98$ となり，この範囲で極小値を唯一もつ．例えば， $\tau_2=2$ のとき， $\tau_1=2.38$ で極小値 0.8106をとっているが，図 5.10, 5.11 の縮尺では認識できないほど滑らかであ

る．この減少傾向は， δ が大きくなるほど顕著になる．図 5.12, 5.13 と比較すると， $\tau_2=1, 2$ のとき $\delta=0.6$ の方が τ_1 に関する減少度合が速いことが分かる．

帰投時間の期待値 δ を変化させたときの最適解の組 (τ_1^*, τ_2^*) 及びそのときのコストの推移を表 5.4 に示す．ただし， $\lambda=1$, $C_1=2$, $C_2=3$, $C_3=1$ 及び $\alpha=0.75$ とする．

表 5.4 平均帰投時間 δ による最適解の推移 ($h=1.0, 1.5$)

$\delta \backslash h$	1.0			1.5		
	τ_1^*	τ_2^*	コスト	τ_1^*	τ_2^*	コスト
0.01	0.7054	0.0000	1.4625	0.8989	0.0000	2.5600
0.10	0.8408	0.0000	1.5881	0.2192	0.7265	2.7773
0.15	0.3618	0.4412	1.6629	0.1469	0.7988	2.8227
0.20	0.2389	0.5527	1.6986	0.0911	0.8417	2.8521
0.25	0.1586	0.6165	1.7229	0.0451	0.8651	2.8688
0.30	0.0963	0.6562	1.7386	0.0056	0.8749	2.8749
0.40	0.0000	0.6931	1.7500	0.0000	0.8755	2.8750

平均帰投時間 δ が小さい範囲では，対処法(B)は選択されない． δ が大きくなるにつれ， τ_2^* が大きくなる一方， τ_1^* は減少し，0 に近づく．最適コストは δ とともに増加している．

故障率 $h=1.0$ と 1.5 における基本モデルと独立帰投時間モデルの最適コストを比較すると，基本モデルのもの（表 5.2 と表 5.3 における $C_2=3$ のとき）は独立帰投時間モデル（表 5.4）における最大値（ $\delta=0.4$ のとき）と最小値（ $\delta=0.01$ のとき）の間に存在しており，両モデルにおいて特筆すべき差異は認められない．

5.3.6 まとめ

ビークルの作業時間が分布に従う場合の搭載システムの修理方法最適化について議論した．作業終了までの平均アベイラビリティ及び平均コストを導出し，それらの挙動について議論した．また，あるアベイラビリティを満たしつつコストが最小となる最適解を数値的に求めた．本節では，作業時間に関してよく用いられる指数分布を仮定した．なお，指数分布以外の分布に従う場合，無記憶性をもたないため後日修理が選択された際の作業の平均余命（作業が終わるまでの時間の期待値）を簡単に求めることができなくなるものの，数値的には計算可能である．

次節では，作業が定時間の場合について考える．

5.4 作業が定時間の場合

本節では，作業が定時間の場合を考える．例えば，貨物を決められた港に運搬する場合や，定期航路を航走するフェリー等，商用船舶の航海時間は事前に決まっているまたは高い確度で予測できる場合が多い．このような場合，前節の分布に従う作業時間を仮定するより，作業時間は既知であるとの仮定が有用である．以下，仮定，目的関数の導出，解析，数値例，まとめの順で説明する．

5.4.1 仮 定

本節での仮定は，5.3.1 節に準じる他，以下の通りとする．

- (1) ビークルの作業時間は $T(>0)$ で，既知である．
- (2) 閾値 τ_1 及び τ_2 は， $0 \leq \tau_1 \leq \tau_1 + \tau_2 \leq T$ を満たす．

5.4.2 目的関数の導出

本小節では，前節の議論と同じ過程により，目的関数を導出する．

1 作業中に対処法(A)を選択する故障が発生する確率 P_1 は，時間間隔 $(0, \tau_1)$ で故障が発生する確率なので，

$$P_1 = F(\tau_1) = 1 - e^{-h\tau_1} \quad (5.35)$$

となる．対処法(B)が選択される回数の期待値 N_2 は，時間間隔 $(\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$ での故障回数の期待値なので，

$$N_2 = h\tau_2 \quad (5.36)$$

である．最後に，対処法(C)が選択される確率 P_3 は，時間間隔 $(\tau_1 + \tau_2, T)$ で故障が発生する確率に等しいから

$$P_3 = F(T - (\tau_1 + \tau_2)) = 1 - \exp[-h\{T - (\tau_1 + \tau_2)\}] \quad (5.37)$$

である．次に，対処法(A)が選択される故障の発生時刻の期待値 T_r は，

$$T_r = \int_0^{\tau_1} tf(t)dt = \frac{1}{h}(1 - e^{-h\tau_1}) - \tau_1 e^{-h\tau_1} \quad (5.38)$$

となる．1 作業完了時間の期待値 T_v は， $\tau_1 > 0$ のとき，式(5.35)より $P_1 > 0$ だから，

$$T_v = (2T_r + 2T_r P_1 + 2T_r P_1^2 + \dots) + T = \frac{2T_r}{1 - P_1} + T = \frac{2}{h}(e^{h\tau_1} - 1) - 2\tau_1 + T \quad (5.39)$$

である．式(5.39)は $\tau_1 = 0$ のときも成り立つ．ダウンタイムの期待値 D_v は，前節とは異なり無記憶性が成り立たない事に注意して，

$$\begin{aligned} D_v &= (T_r + T_r P_1 + T_r P_1^2 + \dots) + \int_{\tau_1 + \tau_2}^T (T - t)h \exp[-h\{t - (\tau_1 + \tau_2)\}]dt \\ &= \frac{T_r}{1 - P_1} + \int_{\tau_1 + \tau_2}^T (T - t)h \exp[-h\{t - (\tau_1 + \tau_2)\}]dt \\ &= T - 2\tau_1 - \tau_2 + \frac{1}{h}(e^{h\tau_1} + \exp[-h\{T - (\tau_1 + \tau_2)\}] - 2) \end{aligned} \quad (5.40)$$

と計算できる．

以上より，平均アベイラビリティ及び1 作業終了までの平均コストは，それぞれ

$$A(\tau_1, \tau_2) = \frac{h\tau_2 + e^{h\tau_1} - \exp[-h\{T - (\tau_1 + \tau_2)\}]}{h(T - 2\tau_1) + 2(e^{h\tau_1} - 1)} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
C_V(\tau_1, \tau_2) &= \frac{P_1}{1-P_1} C_1 + N_2 C_2 + P_3 C_3 \\
&= (e^{h\tau_1} - 1)C_1 + h\tau_2 C_2 + (1 - \exp[-h\{T - (\tau_1 + \tau_2)\}])C_3
\end{aligned} \tag{5.42}$$

となる．ただし，式(5.42)は $\tau_1=0$ のときも成り立つ．

5.4.3 目的関数の挙動

本小節では，前小節で得られた目的関数である式(5.41)と式(5.42)の挙動について調べる．

5.4.3.1 平均コスト

コストについて， τ_2 に関する微分は，

$$\frac{\partial C_V(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = h(C_2 - \exp[-h\{T - (\tau_1 + \tau_2)\}]C_3) > 0 \tag{5.43}$$

より単調増加する． τ_1 に関する微分は

$$\frac{\partial C_V(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = h e^{h\tau_1} \{C_1 - e^{-h(T-\tau_2)}C_3\} > 0 \tag{5.44}$$

より，こちらも単調増加する．よって，コストの最小値は

$$C_V(0,0) = (1 - e^{-hT})C_3 \tag{5.45}$$

であり，最大値は

$C_V(0,T) = hTC_2$ と $C_V(T,0) = (e^{hT} - 1)C_1$ の大きい方，つまり，

$$\frac{C_2}{C_1} > \frac{e^{hT} - 1}{hT} \tag{5.46}$$

を満たすとき $C_V(0,T)=hTC_2$ であり，満たさないとき $C_V(T,0)=(e^{hT}-1)C_1$ である．

5.4.3.2 平均アベイラビリティ

アベイラビリティは， τ_2 に関しては

$$\frac{\partial A(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = \frac{h(1 - \exp[-h\{T - (\tau_1 + \tau_2)\}])}{h(T - 2\tau_1) + 2(e^{h\tau_1} - 1)} > 0 \quad (5.47)$$

より単調増加する．一方， τ_1 に関しては極大値を唯一もつ(付録 N 参照)．
よって，アベイラビリティの最大値は明らかに

$$A(0,T)=1 \quad (5.48)$$

である．

5.4.4 独立帰投時間モデル

帰投に必要な時間が故障時刻とは独立の，期待値 δ の分布に従うと仮定すると，対処法(A)が選択される故障が発生する時刻の期待値 T_r は，

$$T_r = \delta \int_0^{\tau_1} dF(t) = \delta(1 - e^{-h\tau_1}) \quad (5.49)$$

と計算される．よって，平均アベイラビリティは，

$$\tilde{A}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\delta(e^{h\tau_1} - 1) + \tau_1 + \tau_2 + \frac{1 - \exp[-h\{T - (\tau_1 + \tau_2)\}]}{h}}{2\delta(e^{h\tau_1} - 1) + T} \quad (5.50)$$

となる．

5.4.4.1 平均アベイラビリティの挙動

平均アベイラビリティを τ_2 に関して微分すると,

$$\frac{\partial \tilde{A}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = \frac{1 - \exp[-h\{T - (\tau_1 + \tau_2)\}]}{2\delta(e^{h\tau_1} - 1) + T} > 0 \quad (5.51)$$

となるので, τ_2 に関しては単調増加する. 一方, τ_1 に関する微分は,

$$\frac{\partial \tilde{A}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = \frac{e^{h\tau_1} v(\tau_1)}{\{2\delta(e^{h\tau_1} - 1) + T\}^2} \quad (5.52)$$

ただし,

$$v(\tau_1) \equiv (T - 2\delta)\{e^{-h\tau_1} - e^{-h(T-\tau_2)}\} + h\delta\{T - 2(\tau_1 + \tau_2)\} \quad (5.53)$$

である. なお, $v(\tau_1)$ と式(5.53)の符号は一致する. $v(\tau_1)$ の微分は

$$v'(\tau_1) = -h\{2\delta(1 - e^{-h\tau_1}) + Te^{-h\tau_1}\} < 0 \quad (5.54)$$

を満たすので, アベイラビリティは上に凸である. $v(\tau_1)$ の最小値は,

$$v(T - \tau_2) = -hT\delta < 0 \quad (5.55)$$

である. よって,

$$v(0) = (T - 2\delta)\{1 - e^{-h(T-\tau_2)}\} + h\delta(T - 2\tau_2) > 0 \quad (5.56)$$

が成り立つなら, アベイラビリティは τ_1 に関して極大値を唯一もつ単峰関数である. 成り立たないなら, アベイラビリティは単調減少する.

5.4.5 数値例

基本モデルと独立帰投時間モデルの順で数値例を紹介する．パラメータを $T=1$, $h=1$, $C_1=2$, $C_2=3$ 及び $C_3=1$ と設定し，図 5.14 及び 5.15 に平均コスト及び平均アベイラビリティをそれぞれ示す．

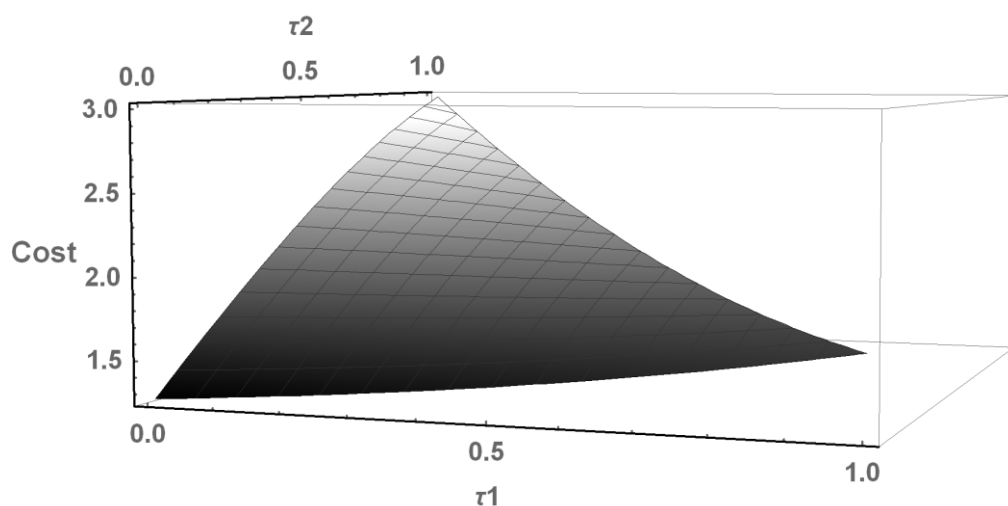


図 5.14 基本モデルの平均コスト関数

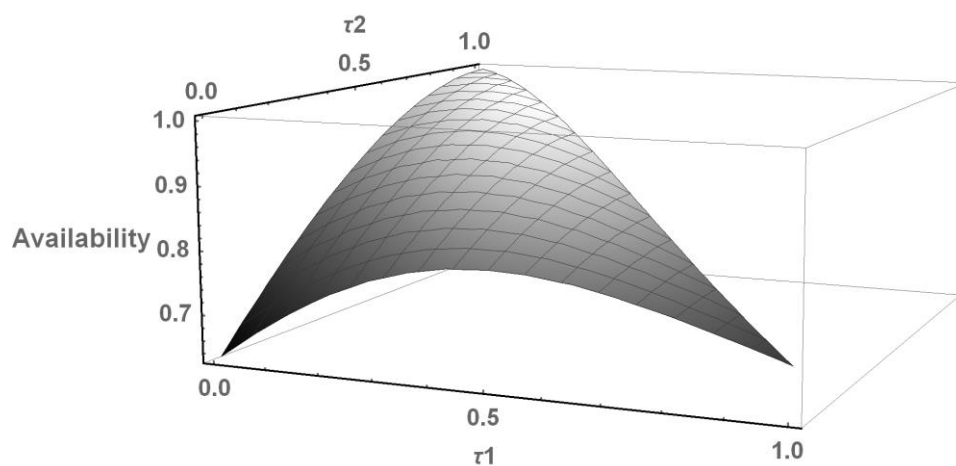


図 5.15 基本モデルの平均アベイラビリティ関数

次に，目標アベイラビリティ $\alpha=0.75$ としたときのいくつかの h と C_2 における最適解を表 5.5 及び 5.6 に示す．他のパラメータは図 5.14 及び

5.15 と同じである．

表 5.5 修理コスト C_2 による最適解の推移 ($h=0.5, 1.0$)

$C_2 \backslash h$	0.5			1.0		
	τ_1^*	τ_2^*	コスト	τ_1^*	τ_2^*	コスト
3	0.000	0.000	0.393	0.207	0.012	1.040
4	0.000	0.000	0.393	0.223	0.000	1.041
5	0.000	0.000	0.393	0.223	0.000	1.041
6	0.000	0.000	0.393	0.223	0.000	1.041

表 5.6 修理コスト C_2 による最適解の推移 ($h=1.5, 2.0$)

$C_2 \backslash h$	1.5			2.0		
	τ_1^*	τ_2^*	コスト	τ_1^*	τ_2^*	コスト
3	0.146	0.194	1.989	0.113	0.298	2.986
4	0.227	0.134	2.230	0.177	0.249	3.528
5	0.278	0.102	2.403	0.219	0.223	3.997
6	0.312	0.083	2.541	0.247	0.207	4.426

$h=0.5$ 以外のケースで、 τ_2 の最適解は C_2 の増加とともに減少している．一方、 τ_1 の最適解は C_2 の増加とともに増加しているが、 $h=1.0$ のときは減少している．これは、最適解周辺での τ_1 方向のコスト関数の傾きによるものと考えられる．

次に、独立帰投時間モデルの計算結果を示す． $h=1$ 、 $T=1$ 及び $\delta=0.1$ としたときの平均アベイラビリティ関数を図 5.16 に示す．

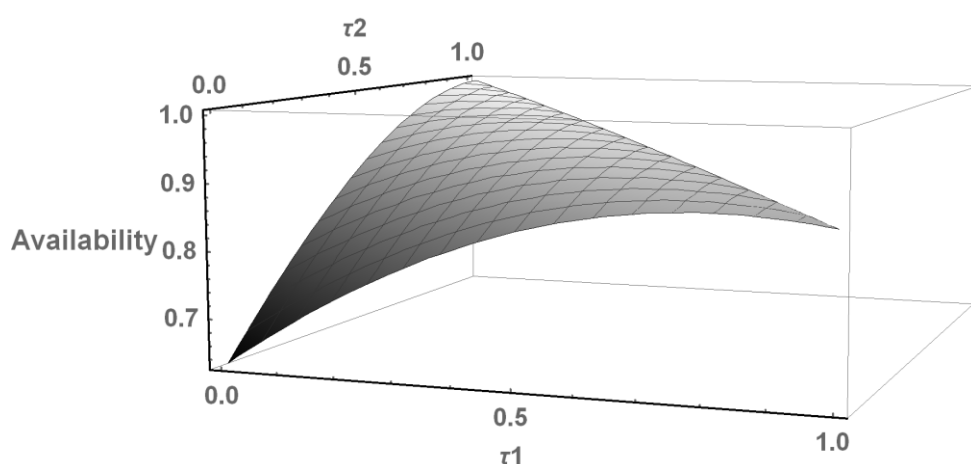


図 5.16 独立帰投時間モデルの平均アベイラビリティ

図 5.16 より, アベイラビリティが τ_1 に関して単峰であることが分かる. なお, $\tau_2=0$ でのアベイラビリティの最大値は $\tilde{A}(0.809,0)=0.887$ である.

表 5.7 に, いくつかの $h=1.0$ 及び 1.5 のとき δ に関する最適解の推移を示す. コストは $C_1=2, C_2=3$ 及び $C_3=1$ である. 表から, 最適な τ_1 は δ が大きくなると 0 に近づくことが確認できる.

表 5.7 平均帰投時間 δ による最適解の推移 ($h=1.0, 1.5$)

$\delta \backslash h$	1.0			1.5		
	τ_1^*	τ_2^*	コスト	τ_1^*	τ_2^*	コスト
0.01	0.201	0.000	0.995	0.260	0.070	1.901
0.1	0.221	0.000	1.037	0.173	0.177	2.009
0.2	0.192	0.045	1.094	0.086	0.261	2.077
0.3	0.102	0.126	1.132	0.015	0.317	2.102
0.4	0.023	0.184	1.147	0.000	0.326	2.103
0.5	0.000	0.199	1.148	0.000	0.326	2.103

5.4.6 まとめ

本節では，ビークルの作業時間が予め分かっている場合の最適修理行動について議論した．目的関数を導出し，その挙動を数学的に明らかにした．数値例にて目的関数の挙動を確認するとともに，最適解を決定し，考察した．なお，前節の数値例で用いた， $\lambda=1$ の指数分布に従う作業時間の期待値は 1 であり，本節の数値例で扱った固定された作業時間 $T=1$ と等しいが，最適コストを比較すると 20~50% という大差で本節の結果が有利となっている．作業が必ず時刻 1 で終了するという事象は，究極的には確率密度が時刻 1 で無限大であり，それ以外で 0 である分布に従っているとも考えられるので，この差は分布の違いによるものといえる．実用では，ソフトウェアのリリースまでの期間や修正パッチの配布間隔等，必ずしも予め決定する必要のない場合もあるが，コストの観点から言えば，事前に決定しておくことが強く推奨できることが分かった．

5.5 おわりに

ランダムな長さまたは予め定められた時間の長さの作業に従事するシステムの故障を，その発生時刻に応じて適切な対処法を選んで修理する保全モデルを提案した．ビークルに搭載されているシステムを想定し，(A)帰投修理，(B)即座修理，(C)後日修理の3種類の対処法を仮定した．帰投修理に必要な時間は，これまでの稼働時間に等しいとする基本モデル及び，故障時刻とは独立の既知な分布に従うとする独立帰投時間モデルを提案した．システムの故障は指数分布に従うものとして，作業完了までの平均アベイラビリティ及び平均コストの期待値を導出し，その挙動について解析した．また，ある平均アベイラビリティを満たしつつ平均コストが最小となる最適な対処法を選択する時間帯を数値的に求めた．

本章での議論により，管理遅延時間を伴うシステムにおいて，意思決定者の故障修理時期に関する判断に理論的根拠を提供することが可能となった．また，本章で提案したモデルは，ビークル搭載システムを念頭に置いているものの，一部の生産システムや，サーバー等のIT機器にも応用できる．例えば，サーバーの再起動やエンジンのアフターアイドリング等，定時間でシステムの保全作業を開始できるとみなせるシステムに対しては，独立帰投時間モデルが適用できる．さらに，ソフトウェアにおける修正パッチ配布時期の決定[80]-[82]にも応用できよう．即時修理と後日修理といった，より少ない選択肢のみが与えられている場合には，特殊例として解析した5.3.3.3及び5.3.4.2節の議論が適用できる．

しかし，本章の議論はシステムの故障発生時間が指数分布に従う場合に限定される．故障分布を一般分布へ拡張する場合，対処法(A)による修理が完全修理のケースと不完全修理のケースが考えられる．後者の場合，対処法(A)が選択される確率が，それが選択される度に変わるため式(5.5)及び(5.39)が成り立たず，目的関数の導出が容易でなくなる．一方前者の場合は本章と同じ要領で目的関数の導出が可能である．目的関数の一般的な挙動は未だ解明されていないが，これを分析することでより普遍

的な法則を発見できる可能性がある．また，本章では対処法(B)の回数は無制限としているが，保全資源等の状況により制限が加わるモデルも考えられる．他にも，IFR システムを考えたとき，対処法(B)は他の対処法に比べ故障率の回復が劣る場合等，現実的な条件を加えた様々な拡張が考えられる．

第 6 章 結 論

6.1 研究成果の概要

本研究では，まず，システムの故障を修復する際に発生するダウンタイムを構成する時間である実働事後保全時間とそれ以外の時間が異なる性質をもつことに着目した．即ち，実働事後保全時間の削減は主として修理方法の改善等の工夫により行われるのに対し，それ以外の時間の削減には多くの場合追加の費用が発生するため，それとの兼ね合いにより決定されるという点である．そこで，実働事後保全時間との区別を明確にするため，ダウンタイムに含まれる実働事後保全時間以外の時間を修理遅延時間と定義した．

さらに，修理遅延時間を構成するフォールト検出時間，補給遅延時間及び管理遅延時間のそれぞれに対し，これまでの先行研究での不十分な点を指摘した．つまり，故障の際に修理遅延時間を伴うにも関わらず，理論的な保全モデルが確立していないため効率的な保全が行われているとは言い難いシステムの存在を指摘した．そこで，それらの点を是正するためいくつかの数理モデルを提案し，解析した．

本研究の成果は，解析の対象としたシステムの観点から以下の 2 点に集約できる．

(1) より現実的な仮定の下でのワンショットシステムの解析

ワンショットシステムの故障は点検でのみ発見され，故障からそれが発見されるまでの間フォールト検出時間が発生する．従来，フォールト検出時間に関する研究は，故障が発見された際には取替えを行うと仮定されていた．しかし，現代

の複雑なワンショットシステムでは，通常故障の際にシステムそのものを交換することはせず，不具合のあるコンポーネントのみ交換している．そこで，本研究では小修理によりシステムを復旧するという，より現実的な仮定を用いて解析を行った．これにより実運用に即した保全方策の策定が可能となった．

(2) 船舶等のビークルに搭載されているシステムの解析

ビークルに搭載されているシステムは，その故障がビークルの航海等の作業に影響を及ぼさない場合も多く，それゆえシステムが非稼働状態でもビークルの作業は続行可能な場合がある．この場合，発生し得る補給遅延時間及び管理遅延時間はビークルの作業に応じて長くなり無視することはできないが，このような特別な状況下にあるシステムに関する研究はこれまで行われていなかった．本研究では，発生し得る補給遅延時間及び管理遅延時間について，現実的なモデルをそれぞれ提案した．一つは，補給遅延時間が一定の確率に応じて発生するモデルである．これにより，システムの運用場所であるビークル内に保全資源の十分な搭載スペースがないという現実の問題に対応する数理モデルを確立した．もう一つは，修理の方法が複数あり，それぞれに発生する費用と管理遅延時間が既知のとき，故障時刻に応じた最適な選択肢を決定するモデルである．これにより，意思決定者が合理的な選択を行うことが可能となった．

本研究により，これまでの研究では容易にカバーできていなかったシステムの保全に対し，意思決定を支援する論拠の提供が可能となった．さらに，効率的な保全方策の策定によりシステムの運用費用の削減や稼働率の向上が期待できる．

6.2 提案モデルとその拡張性

次に，各章での研究成果を詳述する．

第3章では，ワンショットシステムを取り上げた．システムの故障は点検でのみ発見され，故障が発見されたならば直ちに小修理が行われると仮定し，目的関数を最適化する点検間隔等の保全方策を求めた．3.2節でのシングルユニットモデルでは，システムの故障が現実的なワイブル分布に従う場合の目的関数の挙動を明らかにし，最適解を導くアルゴリズムを提案した．シングルユニットモデルを基本とし，いくつかの拡張モデルを議論した．3.3節では，点検でも故障が発見されないユニットを含む2ユニットモデルを，3.4節ではマルチユニットモデルを提案した．さらに，3.5節では点検間隔を故障発見とともに変更することで，より費用対効果の高い保全を行うことができることを示し，3.6節では故障発見を契機として取替えを行う方法と定期的に取り替えを行う方法を比較し，それぞれが有利となる条件について考察した．

第4章では，補給遅延時間が確率的に発生するモデルを考案した．船舶等のビークルに搭載されているシステムが航海中に故障した際，修理に必要な予備品等の保全資源が直ちに利用できるわけではない．即座に修理できる確率 p を決定変数として扱い，ビークルに搭載する保全資源の間接的な最適化を試みた．システムの故障分布として，4.3節ではCFRモデルを扱い，確率と搭載コストの関数がある条件を満たす場合の最適解を導出した．4.4節ではIFRモデルを考え，オーバーホール（取替え）時期の決定方法を2種類提案し，それぞれの目的関数の性質を明らかにするとともに最適解を求めた．

第5章では，管理遅延時間のもつ保全費用と稼働率に関するトレードオフの性質に着目したモデルを提案した．第4章と同様，

ビークルに搭載されているシステムを考え、故障が発生した際の修理方法、即ち修理時間及び費用を、いくつかの選択肢から意思決定者が選択することができるかと仮定した。5.3 節及び 5.4 節で、ビークルの航海等の作業時間がそれぞれランダムな場合と予め決まっている場合について議論し、最適な選択肢を求めた。

本研究ではワンショットシステム及び船舶等に搭載されているシステムといった個別のシステムを想定しているものの、単純な状況を仮定しているためある程度の普遍性を確保しており、幅広い適用性をもつ。フォールト検出時間に関する研究に関しては、ワンショットシステムでなくとも点検でのみ故障が発見されるようなシステムであれば同様に適用できる。例えば、ネットワーク上の端末はサイバー攻撃のリスクに晒されているが、ウイルスの検知後の保全は小修理と考えられる場合があり、本研究が適用できる。また、がん等の病気の治療は小修理とみなせるので、検診の間隔や時期を決定する際にも応用が可能である。さらに、インフラの老朽具合に応じた保全計画の立案が考えられる。補給遅延時間に関する研究では、補給遅延時間が確率的に発生するシステムに適用できる。例えば、企業が販売するシステムに付属するメンテナンスキットの決定や、消費者に対して行う保証の期間・内容に関する問題にも応用できると考える。管理遅延時間に関する研究は、ビークルに搭載されているシステムのみならず、修理時期を決定できる様々な場面で用いることができる。例えば、最適な入札方法の決定や、あるソフトウェアのバグ修正パッチの配布時期の決定等に利用できる。

6.3 今後の課題

今後解決されるべき課題として、保全方策の適用と保全方策研究の視点から説明する。

まず、各章のまとめで述べたような保全方策の適用に関する課題がある。例えば、4章における確率 p と搭載コストの関数の決定等である。これらは保全方策自体とは別問題ではありつつも、実際に保全方策を適用する上で避けて通れない問題でもあり、さらなる検討が必要である。

次に保全方策研究の視点からの課題を述べる。

第一に作業時間分布に関する課題がある。第4, 5章では、作業時間分布として指数分布を仮定した。作業時間として分布関数を仮定することは古くから行われているが、近年 Nakagawa の研究により再び注目を浴びている。Nakagawa らのグループは、ラプラス変換を用いて分布に従う作業時間に従事するシステムの保全方策を研究しているが、詳細な議論は作業が指数分布に従う場合に限定されている[12]。指数分布と定時間は、その時間が既知か否かという点で対極であるが、それらの間には一般分布が存在する。なぜなら、指数分布は一定の終了率（故障分布関数における故障率）をもつ一方、定時間は当該時間でのみ無限大の終了率をもつとみなせるからである。例えば、作業工程が進むにつれ、作業の終了時刻が確定的になってくる現象は、時間とともに終了率が増加することにより表現できる。このように、一般分布は実際の作業時間を表すために必須であり、今後一般分布を用いた解析を明らかにする必要がある。

第二に、各モデルでの修理方法として小修理を用いたが、この仮定の妥当性の確認と、小修理以外の修理への拡張に関する課題がある。小修理は複雑なシステムを構成する一部のコンポーネントを取替えることにより故障を復旧する修理であり、修理による

システムの故障率変化が無視できる場合のみ扱えるが，行われる修理が小修理と近似できるか否かについての明確な基準はない．一方，システムを構成する各コンポーネントを基本単位とし，その全ての故障率を勘案して保全方策を立案することは計算及び運用上の観点から現実的ではない．また，修理が小修理といえない場合は一般修理を仮定することとなるが，この場合も課題がある．まず，本論文での小修理を伴う提案モデルを一般修理に拡張する必要がある．次に，一般修理に関する研究では修理後どの程度故障率が減少するか（若返るか）という仮定の妥当性を検証する必要がある．以上をまとめると，小修理の適用範囲の明確化並びに一般修理を仮定した解析モデル及び一般修理の効果測定手法の確立が課題として残る．

付録 A 平均アベイラビリティの単峰性

ここでは、シングルユニットモデルについて、式(3.13)で表される平均アベイラビリティが、 $m_l > 0$ のとき現実的な条件では単峰となることを説明する．式(3.13)の分子は点検間隔 T に依存しないから、平均アベイラビリティは、その分母である平均取替間隔 $Q(n, T)$ に依存する．そこで、 $\partial Q(n, T)/\partial T = 0$ の方程式の解を調べる．まず、A.1 節で平均取替間隔の挙動を数学的に調べ、解が一つ以上存在することを証明する．次に、A.2 節で複数の解をもつのは形状パラメータ β が大きいかつ小修理回数が少ない場合であることを数値実験で示し、A.3 節で現実的なパラメータでは解が唯一存在することを説明する．

A.1 平均取替間隔

$Q(n, T)$ は式(3.11)で与えられる．これを T で偏微分すると、

$$\frac{\partial Q(n, T)}{\partial T} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) - (T + m_l) \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} k f^{(l)}(kT) \quad (\text{A.1})$$

となる．式(A.1)の漸近的な振る舞いを調べる． T が無限大に近づくときは、式(A.1)の右辺第 2 項は 0 に収束するから、

$$\left. \frac{\partial Q(n, T)}{\partial T} \right|_{T \rightarrow \infty} = n \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ．次に、 T が 0 に近づくとき、 $\partial Q(n, T)/\partial T$ が負の無限大に発散することを証明する．

(証明)

信頼度関数 $\bar{F}(t)$ を $t = kT$ でテイラー展開すると、

$$\bar{F}(t) = \bar{F}(kT) - f(kT)(t - kT) - \frac{1}{2}f'(kT)(t - kT)^2 - \dots \quad (\text{A.3})$$

となる．ただし， $f(t)$ は故障確率密度関数を表す．式(A.3)を $t=kT$ から $t=(k+1)T$ まで t で積分し，さらに $k=0$ から無限大まで足し合わせると，式(A.4)を得る．

$$\mu^{(1)} = T \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}(kT) - \frac{T^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) - \frac{T^3}{6} \sum_{k=0}^{\infty} f'(kT) - \dots \quad (\text{A.4})$$

これを T に関して微分すると，

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}(kT) - T \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) &= \frac{1}{2} \left\{ 2T \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) + T^2 \sum_{k=0}^{\infty} kf'(kT) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{6} \left\{ 3T^2 \sum_{k=0}^{\infty} f'(kT) + T^3 \sum_{k=0}^{\infty} kf''(kT) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる．ところで， T が 0 に近づくとき，

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) = \int_0^{\infty} f(t) dt = 1 \quad (\text{A.6})$$

及び

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} T^2 \sum_{k=0}^{\infty} kf'(kT) &= \lim_{T \rightarrow 0} T \left\{ T \sum_{k=1}^{\infty} f'(kT) + T \sum_{k=2}^{\infty} f'(kT) + T \sum_{k=3}^{\infty} f'(kT) + \dots \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} T \left\{ \int_T^{\infty} f'(t) dt + \int_{2T}^{\infty} f'(t) dt + \int_{3T}^{\infty} f'(t) dt + \dots \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ -T \sum_{k=1}^{\infty} f(kT) \right\} = -1 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

が成り立つ．また， $-\infty < \int_0^{\infty} f^{[m]}(t) dt < \infty$ かつすべての m に対して

$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{[m]}(t) = 0$ が成り立つから，式(A.5)の右辺 2 項目以降は全て 0 に収束する．ただし， $f^{[m]}(t)$ は $f(t)$ の m 次導関数を表す．

さらに，同様の議論が $\bar{F}^{(l)}(t)$ ($l \geq 2$) に対して可能なので，式(A.1)及び(A.5)を用いて

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial Q(n, T)}{\partial T} \right|_{T \rightarrow 0} &= \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) - (T + m_l) \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} k f^{(l)}(kT) \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) - T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} k f^{(l)}(kT) \right\} - \lim_{T \rightarrow 0} \frac{m_l T^2 \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} k f^{(l)}(kT)}{T^2} \\ &= \frac{n}{2} - \lim_{T \rightarrow 0} \frac{m_l \sum_{l=1}^n \mu^{(l)}}{T^2} = -\infty \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

が成り立つ． ■

$Q(n, T)$ は T に関する連続関数であり， $\lim_{T \rightarrow 0} \partial Q(n, T) / \partial T = -\infty$ かつ $\lim_{T \rightarrow \infty} \partial Q(n, T) / \partial T = n > 0$ より， $\partial Q(n, T) / \partial T = 0$ の解は少なくとも一つ存在することが分かった．

A.2 平均取替間隔の微分値の数値計算

本節では，実際にワイブル分布のパラメータを代入し，微分値 $\partial Q(n, T) / \partial T$ の T による変化を観察する． β ， m_l ， n による変化を順に説明する．

(i) 形状パラメータ β

ワイブル分布の尺度パラメータ及び形状パラメータをそれぞれ η ， β とし， β が与える影響を検証する． $n=1$ ， $\eta=3000$ ， $m_l=3$ とし，いくつかの β に対し式(A.1)の $Q'(1, T)$ を計算した結果を図 A.1 に示す．

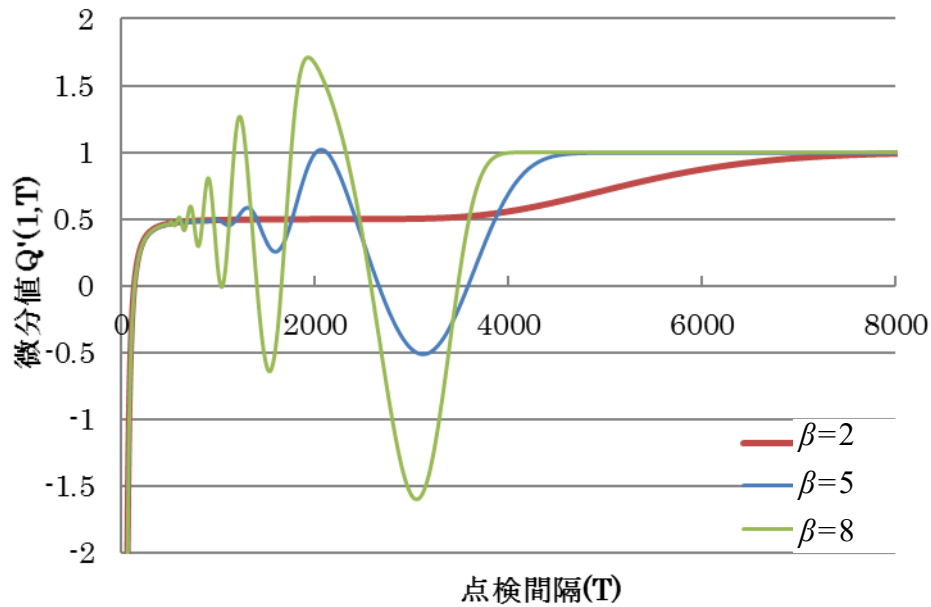


図 A.1 平均取替間隔の微分値と点検間隔の関係 ($n=1$, $\eta=3000$, $m_I=3$)

図 A.1 から， $\beta=2$ のときは平均取替間隔の微分値は単調増加であり $T=120$ 付近でのみ横軸と交わる．よって，平均取替間隔が極小となる点検間隔が唯一存在することがわかる．一方， β の値が大きくなるにつれ， $Q'(T)$ の値は振動し，複数の点で横軸と交わるようになる．よって，平均取替間隔の極値も複数存在する．この原因は以下による．

ワイブル分布の場合，図 A.2 に β の値による信頼度関数の違いを示すとおり， β の値が大きいとき，故障が η 付近で発生する確率が大きくなる．これは，ワイブル分布の信頼度関数 (式(2.16)) から明らかである．

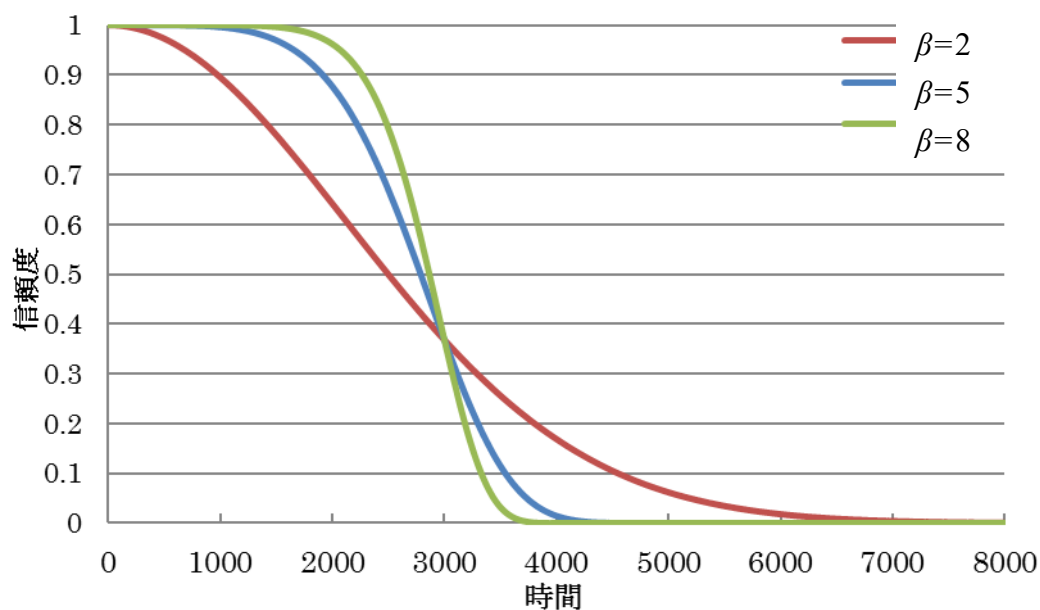


図 A.2 ワイブル分布の信頼度関数($\eta=3000$)

故障が必ず η で発生する場合（即ち， $\beta=\infty$ のとき）， i を正の整数， Δt を小さい正の値とすると， $T=\eta/i-\Delta t$ のとき，故障は $i+1$ 回目の点検で発見される．一方， $T=\eta/i+\Delta t$ のときは，故障は i 回目の点検で発見される．つまり，点検間隔は増加しているが，故障が発見されるまでの時間は減少するという現象が生起する．

β の値が大きいほど平均取替間隔の減少は顕著になる．また，図 A.1 から観察できるとおり， $T=\eta/3$ 付近よりも $T=\eta/2$ 付近，さらに $T=\eta/2$ 付近よりも $T=\eta$ 付近のほうが平均取替間隔の減少は顕著である．これは，前段落の例で i の値が小さい場合に相当する．

また，点検間隔が η を超えたところから微分値は増加し，そのまま 1 に収束する様子が観察できる．この収束は，先ほどと同様の理由により， β の値が大きいほど速い．

(ii) 点検時間 m_I

次に，点検にかかる時間 m_I による変化を観察する． $n=1$ ， $\beta=5$ と固定した場合のグラフを図 A.3 に示す．

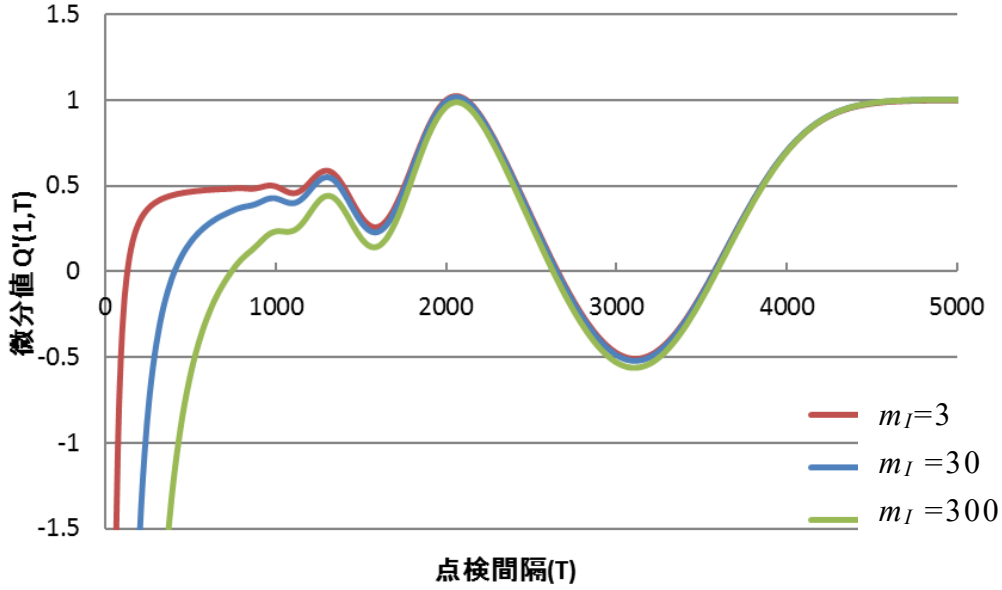


図 A.3 平均取替間隔の微分値と点検時間の関係 ($n=1$, $\eta=3000$, $\beta=5$)

図 A.3 から、 m_I が増加すると、点検間隔が小さいときの微分値が顕著に減少していることが分かる。しかし、微分値の η 付近の極小値は $m_I=300$ でもほとんど変化していない。よって、 m_I が増加することによる $\partial Q(n, T)/\partial T=0$ の解の数の変化、特に一つから複数への変化は β の増加に比べ限定的であるといえる。

(iii) 取替えまでの故障回数 n

最後に、 n が変化したときの微分値を観察する。 $l-1$ 回目の小修理から、次の故障が発見されるまでの平均間隔の微分値を $q'(l, T)$ とおくと、

$$q'(l, T) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}^{(l)}(kT) - (T + m_l) \sum_{k=0}^{\infty} k f^{(l)}(kT) \quad (\text{A.9})$$

であり、 $\partial Q(n, T)/\partial T$ は、

$$\frac{\partial Q(n, T)}{\partial T} = \sum_{l=1}^n q'(l, T) \quad (\text{A.10})$$

と計算できる．図 A.4 に $n=3$ として， $q'(l,T)$ ($l=1,2,3$) 及び $\partial Q(n,T)/\partial T$ のグラフを示す．

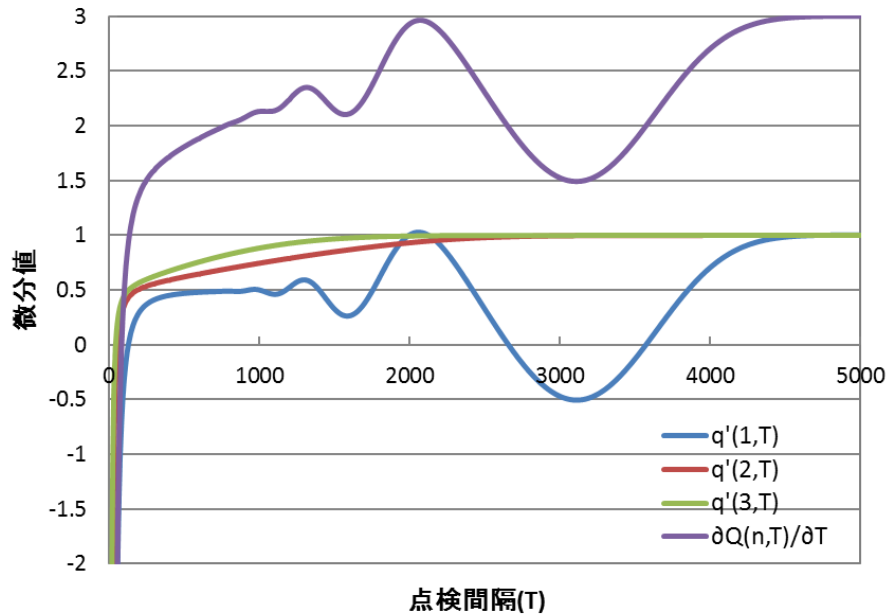


図 A.4 各微分値の変化($\eta=3000$, $\beta=5$, $m_I=3$)

$q'(1,T)$ が η 付近で大きく振動するのに対し， $q'(2,T)$ 及び $q'(3,T)$ は単調増加となっている．これは，小修理を行った後の信頼度関数には，図 A.2 のような激しい落差がないためと考えられる．例として， $\beta=5$ のときの信頼度 $\bar{F}^{(2)}(x)$ 及び $\bar{F}^{(3)}(x)$ を図 A.5 に示す．

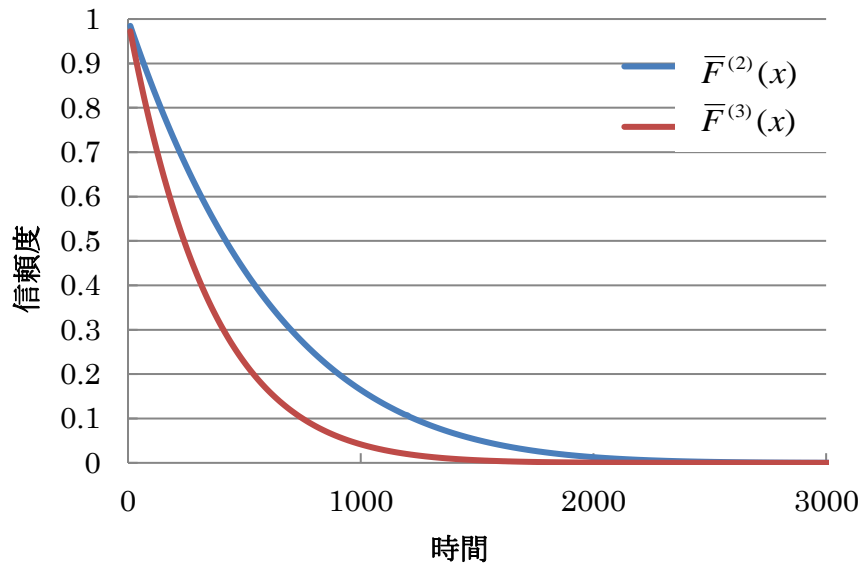


図 A.5 小修理後の信頼度関数($\eta=3000, \beta=5$)

図 A.5 のように，図 A.3 で見られた η 付近での落差が発生しない．このため， $q'(2,T)$ 及び $q'(3,T)$ は単調増加となり，結果として $\partial Q(n,T)/\partial T$ は横軸と一点でしか交わらない．以上のことから， n が大きいほど，平均取替間隔は複数の極値を取りにくいといえる． n の値と極小値を一つだけもつ β のおよその条件を調べたところ，表 A.1 のようになった．

表 A.1 平均取替間隔が極小値を唯一もつための条件

n	$\beta (>1)$
1	3.6 以下
2	6.3 以下
3	9.0 以下

A.3 現実的なパラメータ

機械の各種コンポーネントのワイブルパラメータを公開している文献 [83]によれば，最も形状パラメータが高いユニットはガスタービンの圧

縮機に配置される羽根部分で、最大で 6.6 程度である．このような高い形状パラメータをもつコンポーネントは通常は駆動による摩耗にさらされているが、ワンショットシステムは常時待機しているため駆動部は存在しない．実際、ワンショットシステムに多用されている電子部品の故障率の増加速度は緩やかであることが知られており、文献[84]では最大でも 2.8 程度とされている．さらに、故障率が表 A.1 を満たさないような大きな形状パラメータに従う場合、急速に劣化が進むため通常小修理は適用されないであろう．

以上の議論から、小修理を伴うワンショットシステムに関するパラメータでは、平均アベイラビリティが極大値を唯一もつといって差し支えないと考えられる．

付録 B 平均コストレートの挙動

平均コストレート式(3.14)が $T < T^*$ で単調減少とならないための十分条件を, 平均コストレートが極値をもつための方程式である $\partial C(n, T)/\partial T = 0$ を用いて導く. $\partial C(n, T)/\partial T = 0$ を変形すると,

$$\frac{C_I}{(n-1)C_R + C_P} = \frac{-\partial Q(n, T)/\partial T}{P(T)^2 - \{(n-1)m_R + m_p\}P'(T)} \quad (\text{B.1})$$

となる. 式(B.1)の右辺を $S(T)$ とおくと,

$$\left. \frac{\partial}{\partial T} Q(n, T) \right|_{T=T^*} = 0 \quad (\text{B.2})$$

より, $S(T^*) = 0$ が成り立つ. T が 0 に近づくと, 付録 A の式(A.6)及び(A.7)を用いて,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} S(T) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{-T^2 \partial Q(n, T)/\partial T}{\{TP(T)\}^2 - \{(n-1)m_R + m_p\}T^2 P'(T)} \\ &= \frac{m_I}{\sum_{l=1}^n \mu^{(l)} + (n-1)m_R + m_p} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

を得る. よって, 式(B.4)で表される条件を満たすとき, 式(B.1)を満たす点検間隔が $0 < T < T^*$ で少なくとも一つ存在し, 単調減少とはならない.

$$\frac{C_I}{(n-1)C_R + C_P} < \frac{m_I}{\sum_{l=1}^n \mu^{(l)} + (n-1)m_R + m_p} \quad (\text{B.4})$$

なお, 式(B.4)を満たすとき, 極大値が必ず存在する.

付録C リスク

3.4 節では，リスクを単位時間当たりのダウンコストと読み替えて解析を行った．この仮定の意味を説明する．

1 からシステムの平均アベイラビリティを引いた値である平均アンアベイラビリティは，式(3.55)における C_D の係数で表せるので，式(C.1)である．

$$1 - \frac{\sum_{l=1}^n \mu_s^{(l)}}{T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s^{(l)}(kT)} \quad (\text{C.1})$$

リスクは，システムの作動要求が発生したときにシステムが故障している確率と，その際の損失コストの積で与えられる．そこで，損失コストが定数 \hat{C}_D で，システムを使用する時間の期待値が，平均取替間隔に比べて十分大きい値 T_L で与えられた場合，単位時間当たりに発生するリスクの期待値は

$$\left(1 - \frac{\sum_{l=1}^n \mu_s^{(l)}}{T \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_s^{(l)}(kT)} \right) \frac{\hat{C}_D}{T_L} \quad (\text{C.2})$$

となる．上式を式(3.55)と比べることにより，式(C.3)が成り立つ．

$$C_D = \frac{\hat{C}_D}{T_L} \quad (\text{C.3})$$

つまり，3.4 節ではシステムの使用時刻の期待値は既知で，平均取替間隔と比べ非常に大きな値であること及びシステムの作動が失敗した際の損失コストが既知であるという仮定を置いていたことが分かる．

付録D $n \geq 2$ の場合の計算困難さ

n が 2 以上の場合，システムの取替えまでに各ユニットがどのような順序で何回故障するかを表す故障パターンの場合の数が n 及び m とともに増大すること，また計算が容易でなくなることを説明する．まず，本付録で用いる記号を D.1 節に記し，D.2 節で $n=2$ かつ $m=2$ という最も単純なケースを例として取り上げる．

D.1 記 号

$X_i^{(l)}$: ユニット i ($i=1,2$) の $l-1$ 回目 ($l=1, 2, \dots, n$) の小修理後の稼働時間を表す確率変数 (0 回目の小修理とは，システムの運用を開始した時点またはシステムが取替えられた時点を指す.)

$Y_i^{(l)}$: ユニット i の l 回目の故障が発生するまでのシステムの稼働時間を表す確率変数，つまり $Y_i^{(l)} = X_i^{(1)} + X_i^{(2)} + \dots + X_i^{(l)}$

$Z_i^{(l)}$: ユニット i の l 回目の故障が発生してから，それが次の点検で発見されるまでのダウンタイム

i^* : $i=1$ のとき 2, $i=2$ のとき 1 となる関数

$\lceil a \rceil$: a 以上の最小の整数を表す天井関数

D.2 $n=2$ かつ $m=2$ の場合

システムの取替えまでの各ユニットの故障パターンは次の 3 通りある．

(ア) 同じユニットが 2 回続けて故障する (図 D.1 (ア))

(イ) 同じ点検間隔内で両方のユニットが故障する (図 D.1 (イ))

(ウ) 別々の点検間隔内でそれぞれのユニットが故障する (図 D.1 (ウ))

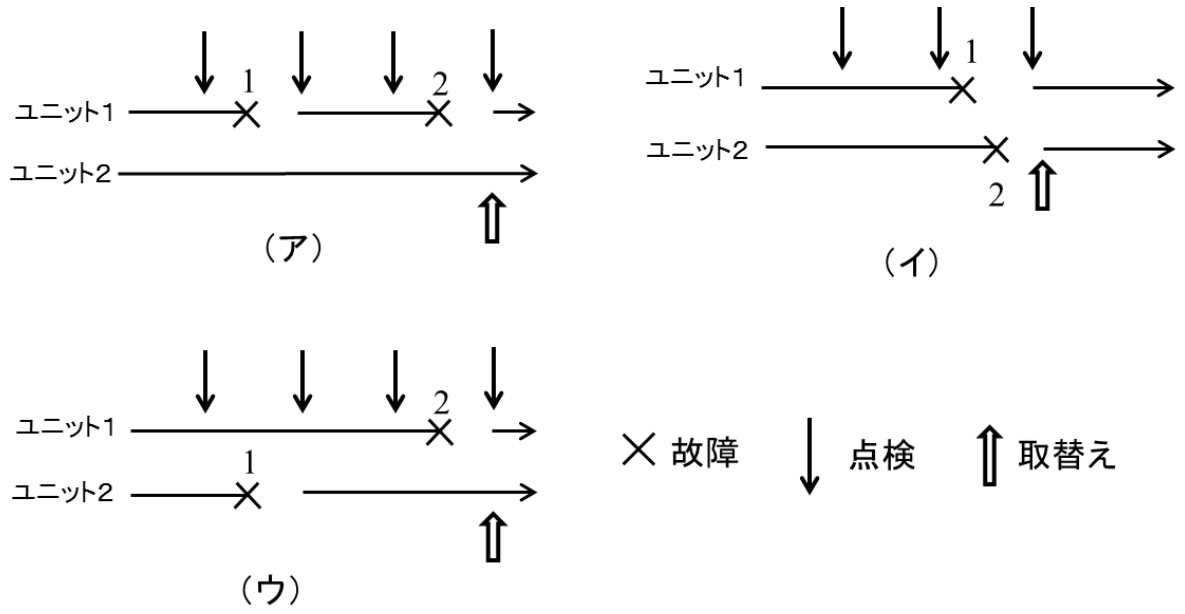


図 D.1 故障パターン

上述の (ア), (イ) 及び (ウ) が起こる確率をそれぞれ p_1 , p_2 及び p_3 とする. 1 回目の故障が発見される時間, 即ち $X_i^{(1)} + Z_i^{(1)}$ は常に T の倍数であることに注意して, p_1 は次式で求められる.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \sum_{i=1}^2 \Pr(X_i^{(1)} + Z_i^{(1)} + X_i^{(2)} < X_{i^*}^{(1)}) = \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty \Pr\left(T \left\lceil \frac{x}{T} \right\rceil + X_i^{(2)} < X_{i^*}^{(1)}\right) dF_i(x) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Pr\left(T \left\lceil \frac{x}{T} \right\rceil + u < X_{i^*}^{(1)}\right) f_i(x) dx dF_i^{(2)}(u|x) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^\infty \int_0^{kT} \int_{(k-1)T}^{kT} \bar{F}_{i^*}(kT + u) f_i(x) f_i^{(2)}(u|x) dx du
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

ただし, 1 回目の故障までの稼働時間を x , 小修理から 2 回目の故障が発生するまでの稼働時間を u とした. また, $F_i^{(2)}(u|x)$ 及び $f_i^{(2)}(u|x)$ はそれぞれ, $X_i^{(1)} = x$ という条件の下での小修理後のユニット i の故障分布関数及び故障確率密度関数を表す. なお, 式(3.1)から,

$$F_i^{(2)}(u|x) = \frac{F_i(x+u) - F_i(x)}{\bar{F}_i(x)} \quad (\text{D.2})$$

$$f_i^{(2)}(u|x) = \frac{\partial}{\partial u} F_i^{(2)}(u|x) = \frac{f_i(x+u)}{\bar{F}_i(x)} \quad (\text{D.3})$$

である．同様にして， p_2 及び p_3 はそれぞれ式(D.4)及び(D.5)で求められる．

$$\begin{aligned} p_2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Pr((k-1)T < X_i^{(1)} < X_{i^*}^{(1)} \leq kT) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \{\bar{F}_{i^*}(x) - \bar{F}_{i^*}(kT)\} dF_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} f_i(x) \{\bar{F}_{i^*}(x) - \bar{F}_{i^*}(kT)\} dx \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \sum_{i=1}^2 \Pr(X_i^{(1)} + Z_i^{(1)} < X_{i^*}^{(1)} < X_i^{(1)} + Z_i^{(1)} + X_i^{(2)}) \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \Pr\left(T \left\lceil \frac{x}{T} \right\rceil < X_{i^*}^{(1)} < T \left\lceil \frac{x}{T} \right\rceil + X_i^{(2)}\right) dF_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{kT}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} \bar{F}_i^{(2)}(v-kT) f_i(x) f_{i^*}(v) dx dv \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

ただし，式(D.4)では，先に故障するユニット i の稼働時間を x ，後に故障するユニット i^* の稼働時間を v とした．これらの式をもとに，平均コストレートを導出するのに必要な情報を計算することができる．例えば，1 サイクル当たりのシステムの平均稼働時間は，

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} (x+u) \bar{F}_{i^*}(kT+u) f_i(x) f_i^{(2)}(u|x) dx du + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} x f_i(x) \{\bar{F}_{i^*}(x) - \bar{F}_{i^*}(kT)\} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{kT}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} (x+v-kT) \bar{F}_i^{(2)}(v-kT) f_i(x) f_{i^*}(v) dx dv \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

となる．

ここではこれ以上の議論は行わないが、この例から、 n 及び m の値が大きくなるにつれ、より多くの場合分け、また、より多重の積分の計算を必要とすることが分かる．よって、 n 及び m に関して一般的な解を得ることは容易ではない．

付録 E 近似式

ここでは，3.4.3.2 節で示される，マルチユニットモデルでの近似に用いる式について説明する．E.1 節で信頼度関数，E.2 節で小修理コストの説明を行う．

E.1 信頼度関数の近似

信頼度関数を近似するためには，小修理が行われた時点で，各ユニットがそれぞれどのくらいの時間稼働していたかを考える必要がある．

まず，一つ目の方法として平均稼働時間を用いた近似を説明する．次に，非定常ポアソン分布の結果を用いた近似を説明する．

(A1) 平均稼働時間を用いた近似

同じ点検間隔内で複数のユニットが故障する可能性を無視し，1 回目のシステムの故障が，正確にシステムの平均稼働時間 $\mu_s^{(1)}$ で発生し，各ユニットはそれぞれ $\mu_s^{(1)}$ だけ稼働したと仮定する．この仮定より，小修理を 1 回行った後のシステムの信頼度は，

$$\bar{F}_s^{(2)}(x) = \prod_{i=1}^m \exp\{-H_i(x + \mu_s^{(1)}) + H_i(\mu_s^{(1)})\} \quad (\text{E.1})$$

と表せる．また，1 回目の小修理から次の故障までの平均稼働時間は，

$$\mu_s^{(2)} = \int_0^\infty \bar{F}_s^{(2)}(x) dx \quad (\text{E.2})$$

で計算することができる．これを同じように繰り返し，システムの $k-1$ 回目の故障と k 回目の故障の間の稼働時間は正確に $\mu_s^{(k)}$ であり，

その間各ユニットはそれぞれ $\mu_s^{(k)}$ だけ稼働したと仮定すると，小修理を行った後のシステムの信頼度関数及びシステムの平均稼働時間を次式により順に計算することができる．

$$\bar{F}_s^{(l)}(x) = \prod_{i=1}^m \exp \left\{ -H_i \left(x + \sum_{j=1}^{l-1} \mu_s^{(j)} \right) + H_i \left(\sum_{j=1}^{l-1} \mu_s^{(j)} \right) \right\} \quad (\text{E.3})$$

$$\mu_s^{(l)} = \int_0^\infty \bar{F}_s^{(l)}(x) dx \quad (\text{E.4})$$

ただし， $l \geq 2$ である．

(A2) 非定常ポアソン過程を用いた近似

同じ点検間隔で複数の故障が発生せず，ユニットの故障から発見までのダウンタイムが無視できる場合，小修理後のシステムの信頼度は，式(3.5)をそのまま用いることができ，

$$\bar{F}_s^{(l)}(x) = \int_0^\infty \bar{F}_s^{(1)}(x+y) \frac{[H_s(y)]^{l-2}}{(l-2)!} h_s(y) dy \quad (\text{E.5})$$

となる．式(E.5)を，ユニットのダウンタイムを考慮することで修正し，近似する．

まず，一つのユニットのダウンタイムについて考える．ユニット i が故障してから発見されるまでの時間の期待値は，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)T}^{kT} (kT-x) dF_i^{(l)}(x) \quad (\text{E.6})$$

である．ここで，もし点検間隔が十分短いならば，ユニット i の故障分布関数は，全ての点検間隔 $((k-1)T, kT)$ ($k=1, 2, \dots$) で直線に近似することができる．つまり，各間隔での故障確率密度関数は定数とみなせるので，正の整数 k について，次式が成り立つ．

$$f_i^{(l)}(x) = \frac{c_k}{T} \quad ((k-1)T \leq x < kT) \quad (\text{E.7})$$

ただし， c_k は $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$ を満たす定数である．式(E.7)を用いると，式(E.6)は次のようになる．

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[kx - \frac{x^2}{2T} \right]_{(k-1)T}^{kT} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} c_k T = \frac{T}{2} \quad (\text{E.8})$$

つまり，平均すると，点検と次の点検のちょうど中間の時刻で故障が発生するといえる．なお，ダウンタイムを点検間隔の半分として近似する方法は，文献[14][15]においても，最適な点検スケジュールを決定する際に用いられている．

本節では，この考えを複数のユニットが存在する場合に拡張する．まず，図 E.1 に示すとおり，ある一つのユニット（図ではユニット q ）が，点検と点検のちょうど中間の時刻で故障すると考える．

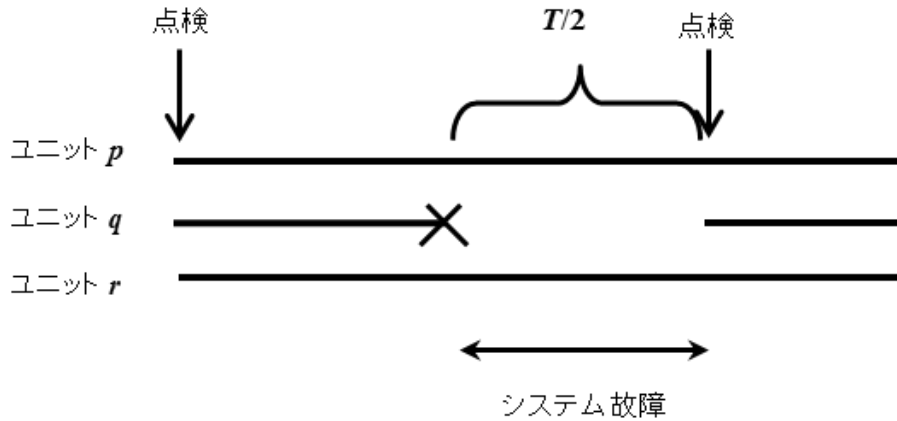


図 E.1 m ユニットへの拡張

また，他のユニットは同じ点検間隔内で故障しないと仮定する．この場合，故障していないユニットは，システムが故障している $T/2$ の間だけ長く稼働していることになる．さらに，各ユニットの故障

確率の違いを無視すると，システムの故障から小修理までの間に，各ユニットは平均して，

$$(m-1)\frac{T}{2}/m = \frac{m-1}{2m}T \quad (\text{E.9})$$

だけ余計に稼働していたと考えることができる．これは，故障していない $(m-1)$ 個のユニット以外のユニットが余計に稼働した時間 $T/2$ を足し合わせ，これをユニット数 m で割ったものである．よって，システムの信頼度関数は，

$$\bar{F}_s^{(l)}(x) = \int_0^\infty \bar{F}_s\left(x + \frac{m-1}{2m}T + y\right) \frac{[H_s(y)]^{l-2}}{(l-2)!} h_s(y) dy \quad (\text{E.10})$$

と表すことができる ($l \geq 2$)．

E.2 小修理コストの近似

システムの直前の取替えから，次の取替えの間に行う小修理は，通常 $n-1$ 回である．同一点検間隔内で複数の故障が発生すると，その回数が $n-1$ 回よりも少なくなることがあるが，この確率は通常大きくないので，ここでは必ず $n-1$ 回小修理を行うと考える．しかし，各ユニットがそれぞれ何回故障するかについては容易に計算することができない．そこで，各ユニットの小修理回数を近似することで，1 サイクル当たりのシステム全体の小修理コストを評価する．

非定常ポアソン過程の議論から，故障が直ちに発見，小修理されるモデルでは，あるユニットが特定の時刻までに経験する故障（小修理）の平均回数は，その時刻でのユニットの累積故障率関数で表される．3.4 節のモデルでは，故障が直ちに発見されるわけではないものの，この事実を用いて，システムの n 回の故障のうち，各ユニットが何回故障する

かを表す割合 $\rho_i(n)$ を,

$$\rho_i(n) = \frac{H_i\left(\sum_{l=1}^n \mu_s^{(l)}\right)}{H_s\left(\sum_{l=1}^n \mu_s^{(l)}\right)} \quad (\text{E.11})$$

と表す．これは，システム全体の累積故障率関数と，各ユニットの累積故障率関数の比を表している．この式を用いると，システムの見直しまでにかかる全体の小修理コストは，

$$C_M = (n-1) \sum_{i=1}^m \rho_i(n) C_{Ri} \quad (\text{E.12})$$

として計算できる．

付録 F 極限值での解析

ここでは，3.6 節において，形状パラメータが 1 または無限大に近づく場合の時間管理法と回数管理法の最適コストレートを比較し，両方策は同等または時間管理法が有利となることを導く．

F.1 $\beta \rightarrow 1$ のとき

このとき，システムの故障率は一定となり，取替えと小修理は区別されない．また，取替コスト C_p は小修理コスト C_R よりも大きいから，取替えは行われない．平均アベイラビリティは，

$$\frac{\int_0^T \bar{F}(t) dt}{T} = \frac{\eta(1 - e^{-T/\eta})}{T} \quad (\text{F.1})$$

となる．最適点検間隔 T^* は，式(F.1)が α となる唯一の解である．また，このときのコストレートは

$$C_f^* = C_f(\infty, T^*) = \frac{C_I}{T^*} + \frac{\alpha C_R}{\eta} \quad (\text{F.2})$$

である．一方，時間管理法でのコストレートは次式のようになる．

$$C_t(m, T^*) = \frac{(m-1)C_I + (m-1)(1 - e^{-T^*/\eta})C_R + C_P}{mT^*} \quad (\text{F.3})$$

ただし， T^* は式(F.2)のものと等しい． m に関する差分をとると，

$$C_t(m+1, T^*) - C_t(m, T^*) = -\frac{C_P - C_I - (1 - e^{-T^*/\eta})C_R}{m(m+1)T^*} \quad (\text{F.4})$$

となるので，式(F.4)が常に 0 または負となる条件式(F.5)が成り立てば，

m の最適値は無限大となる．

$$C_P \geq C_I + \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{T^*}{\eta}\right) \right\} C_R = C_I + \frac{\alpha T^* C_R}{\eta} \quad (\text{F.5})$$

このときのコストレートは，

$$C_t^* = C_t(\infty, T^*) = \frac{C_I}{T^*} + \frac{\alpha C_R}{\eta} \quad (\text{F.6})$$

であり，式(F.2)と等しい．式(F.5)が成り立たないときには，

$$C_t^* = C_t(1, T^*) = \frac{C_P}{T^*} \quad (\text{F.7})$$

となり，最適コストレートの比は

$$\frac{C_f^*}{C_t^*} = \frac{1}{C_P} \left(C_I + \frac{\alpha T^* C_R}{\eta} \right) > 1 \quad (\text{F.8})$$

であるから，時間管理法が有利となる．これは，時間管理法が取替時に点検を要さないためであると考えられる．

F.2 $\beta \rightarrow \infty$ のとき

このとき，故障は必ず時刻 η で発生し，その後取替えられるまで再度稼働することはない．よって，最適点検間隔は $T^* = \eta/\alpha$ で，取替間隔と等しい．2 方策の最適コストレートはそれぞれ

$$C_f^* = C_f(1, \eta/\alpha) = \frac{\alpha(C_P + C_I)}{\eta} \quad (\text{F.9})$$

$$C_t^* = C_t(1, \eta/\alpha) = \frac{\alpha C_P}{\eta} \quad (\text{F.10})$$

となる．これらの比は

$$\frac{C_f^*}{C_t^*} = 1 + \frac{C_I}{C_P} > 1 \quad (\text{F.11})$$

であり，時間管理法の方が有利となる．

付録 G 式(4.5)の証明

ここでは，式(4.5)を証明する．まず，式(4.5)の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{\infty} l P_1(l, x) &= \sum_{l=1}^{\infty} l \left\{ p^l \frac{H(x)^l}{l!} e^{-H(x)} + p^l (1-p) \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{H(x)^k}{k!} e^{-H(x)} \right\} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} l p^l \frac{H(x)^l}{l!} e^{-H(x)} + \sum_{l=1}^{\infty} l p^l (1-p) \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{H(x)^k}{k!} e^{-H(x)}\end{aligned}\quad (\text{G.1})$$

と変形できる．式(G.1)の最右辺第1項は，

$$e^{-H(x)} \sum_{l=1}^{\infty} l p^l \frac{H(x)^l}{l!} = e^{-H(x)} p H(x) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\{p H(x)\}^{l-1}}{(l-1)!} = p H(x) \exp\{-(1-p)H(x)\} \quad (\text{G.2})$$

となる．式(G.1)の最右辺第2項中， $\sum_{l=1}^{\infty} [l p^l \sum_{k=l+1}^{\infty} \{H(x)^k / k!\}]$ は，

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{\infty} l p^l \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{H(x)^k}{k!} &= p \{e^{H(x)} - 1 - H(x)\} + 2p^2 \left\{ e^{H(x)} - 1 - H(x) - \frac{H(x)^2}{2!} \right\} \\ &\quad + 3p^3 \left\{ e^{H(x)} - 1 - H(x) - \frac{H(x)^2}{2!} - \frac{H(x)^3}{3!} \right\} + \cdots \\ &= \{e^{H(x)} - 1 - H(x)\} (p + 2p^2 + 3p^3 + \cdots) - \frac{H(x)^2}{2} (2p^2 + 3p^3 + \cdots) \\ &\quad - \cdots - \frac{H(x)^m}{m!} (mp^m + (m+1)p^{m+1} + \cdots) - \cdots \\ &= \{e^{H(x)} - 1 - H(x)\} \frac{p}{(1-p)^2} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{H(x)^l}{l!} \cdot \frac{p^l \{p + l(1-p)\}}{(1-p)^2}\end{aligned}\quad (\text{G.3})$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
\sum_{l=2}^{\infty} \frac{H(x)^l}{l!} \cdot \frac{p^l \{p + l(1-p)\}}{(1-p)^2} &= \frac{p}{(1-p)^2} \{e^{pH(x)} - 1 - pH(x)\} + \frac{pH(x)}{1-p} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\{pH(x)\}^{l-1}}{(l-1)!} \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} \{e^{pH(x)} - 1 - pH(x)\} + \frac{pH(x)}{1-p} \{e^{pH(x)} - 1\} \quad (G.4)
\end{aligned}$$

が成り立つので，式(G.3)は

$$\frac{p}{(1-p)^2} \{e^{H(x)} - e^{pH(x)} - (1-p)H(x)\} - \frac{pH(x)}{1-p} \{e^{pH(x)} - 1\} \quad (G.5)$$

と変形できる．式(G.1)の最右辺第2項は(G.5)と $(1-p)\exp(-H(x))$ の積なので，

$$\begin{aligned}
&\frac{p}{1-p} [1 - \exp\{-(1-p)H(x)\} - (1-p)H(x)e^{-H(x)}] - pH(x)[\exp\{-(1-p)H(x)\} - e^{-H(x)}] \\
&= \frac{p}{1-p} [1 - \exp\{-(1-p)H(x)\}] - pH(x)\exp\{-(1-p)H(x)\} \\
&= p \left[\frac{1}{1-p} - \left\{ \frac{1}{1-p} + H(x) \right\} \exp\{-(1-p)H(x)\} \right] \quad (G.6)
\end{aligned}$$

となる．式(G.1)は，式(G.2)及び(G.6)より，次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
&pH(x)\exp\{-(1-p)H(x)\} + p \left[\frac{1}{1-p} - \left\{ \frac{1}{1-p} + H(x) \right\} \exp\{-(1-p)H(x)\} \right] \\
&= p \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \exp\{-(1-p)H(x)\} \right) \\
&= \frac{p}{1-p} [1 - \exp\{-(1-p)H(x)\}] = \frac{p}{1-p} P_2(x) \quad (G.7)
\end{aligned}$$

よって，式(4.5)が証明された． ■

付録H b_∞ の発散

ここでは，故障が形状パラメータ 2 以下のワイブル分布に従うとき，式(4.28)で表される b_∞ が正の無限大に発散することを証明する．

式(4.28)を次式のように書き直す．

$$b_\infty = \lambda^2 \int_0^\infty \tilde{b}(y) dy + \lambda \int_0^\infty \exp[-(1-p)H(x) - \lambda x] dx \quad (\text{H.1})$$

ここで，

$$\tilde{b}(y) \equiv \int_0^\infty \exp[-(1-p)\{H(y+x) - H(y)\} - \lambda x] dx \quad (\text{H.2})$$

である．式(H.1)の右辺第 2 項は正の定数となる．ここで， $y \rightarrow \infty$ のとき $y\tilde{b}(y)$ が正の定数に収束することが証明できれば， $\tilde{b}(y)$ は $1/y$ の速さで 0 に収束するので， $\tilde{b}(y)$ を積分した関数と定数の和を表す式(H.1)は無限大に発散することが導かれる．ワイブル分布の形状パラメータが 2 のときにこれを証明する．

(証明)

ワイブル分布の形状パラメータが 2 のとき，式(H.2)の指数関数の中身(指数部)は y の 2 次式で表せるので， $-lx^2 - kxy - mx$ とする．ただし， $l > 0$, $k > 0$ かつ $m > 0$ である．極限は，

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} y\tilde{b}(y) &= \lim_{y \rightarrow \infty} y \int_0^\infty \exp \left[-l \left(x + \frac{ky+m}{2l} \right)^2 + \frac{(ky+m)^2}{4l} \right] dx \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} y \exp \left\{ \frac{(ky+m)^2}{4l} \right\} \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{(ky+m)/(2\sqrt{l})}^\infty \exp(-z^2) dz \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

となる．ここで，式(H.4)が成り立つことを確認する．

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta e^{\theta^2} \int_\theta^\infty e^{-z^2} dz = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\int_\theta^\infty e^{-z^2} dz}{1/(\theta e^{\theta^2})} = \frac{1}{2} \quad (\text{H.4})$$

式(H.3)に $\theta = (ky + m)/(2\sqrt{l})$ を代入すると,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y\tilde{b}(y) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\frac{2\sqrt{l}}{k} \theta - \frac{m}{k} \right) e^{\theta^2} \int_{\theta}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \frac{1}{k} \quad (\text{H.5})$$

を得る. よって, 任意の正の値 ε に対し, $y > y_0$ ならば,

$$\left| y\tilde{b}(y) - \frac{1}{k} \right| < \varepsilon \quad (\text{H.6})$$

を満たす $y_0 > 0$ が存在する. また, $\tilde{b}(y) > 0$ より, 式(H.6)を変形して積分すると,

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1/k - \varepsilon}{y} dy < \int_{y_0}^{\infty} \tilde{b}(y) dy < \int_0^{\infty} \tilde{b}(y) dy < b_{\infty} \quad (\text{H.7})$$

が成り立つ. 式(H.7)の最左辺は正の無限大に発散するから, 形状パラメータが 2 のとき, b_{∞} が正の無限大に発散する.

■

形状パラメータが 2 よりも小さいとき, 十分大きな y に対して $\tilde{b}(y)$ は形状パラメータが 2 のときよりも大きくなるので, $b_{\infty} = \infty$ となることは明らかである.

付録 I 平均コストレートの挙動

ここでは，ORP が定まっている場合の作業時間管理方策での平均コストレートの挙動について説明し，最適な T を場合分けする．I.1 節で挙動を分析し，I.2, I.3 及び I.4 節で補題等を証明する．

I.1 挙動分析

式(4.37)を T に関して微分すると，次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial T} C_3(T, p) = \frac{\hat{C}(p)\phi'(T)\left\{T - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T})\right\} - \{\hat{C}(p)\phi(T) + C_o\}(1 - e^{-\lambda T})}{\left\{T - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T})\right\}^2} \quad (\text{I.1})$$

これが 0 と等しい方程式と変形すると，

$$\frac{\lambda T - (1 - e^{-\lambda T})}{\lambda T(1 - e^{-\lambda T})} = \frac{\int_0^T \xi(u)du + C_o / \hat{C}(p)}{T\xi(T)} \quad (\text{I.2})$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} \xi(T) &\equiv \phi'(T) \\ &= \lambda^2 \int_0^T (1 - \exp[-(1-p)\{H(T) - H(y)\}])e^{-\lambda(T-y)} dy \\ &\quad + \lambda(1 - \exp[-(1-p)H(T)])e^{-\lambda T} \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

である．以下，式(I.2)の解について調べる．式(I.2)の右辺及び左辺をそれぞれ $\gamma_R(T)$ 及び $\gamma_L(T)$ とおく，コストレートは $\gamma_L(T) < \gamma_R(T)$ のとき単調減少し， $\gamma_L(T) > \gamma_R(T)$ のとき単調増加する．関数 $\xi(T)$ は 0 から λ までの狭義単調増加関数となる（I.2 節参照）ので， $\gamma_R(0) = \infty$ かつ $\gamma_R(\infty) = 1$ が成り立つ．一

方, $\gamma_L(T)$ は 1/2 から 1 までの狭義単調増加関数である (I.3 節参照). つまり, $\gamma_L(T) < 1$ である.

次に, 式(I.2)の右边に関連した以下の T に関する方程式を考える.

$$\frac{C_o}{\hat{C}(p)} = T\xi(T) - \int_0^T \xi(u)du \quad (\text{I.4})$$

この方程式の右边は, その微分が $T\xi'(T) > 0$ となるので狭義単調増加する. 左辺は定数なので, この方程式は高々 1 個の解をもつ. この潜在的な解を T_1 とする. 図 I.1 に v - u 平面に $v=\xi(u)$ を用いて T_1 を図形的に表す.

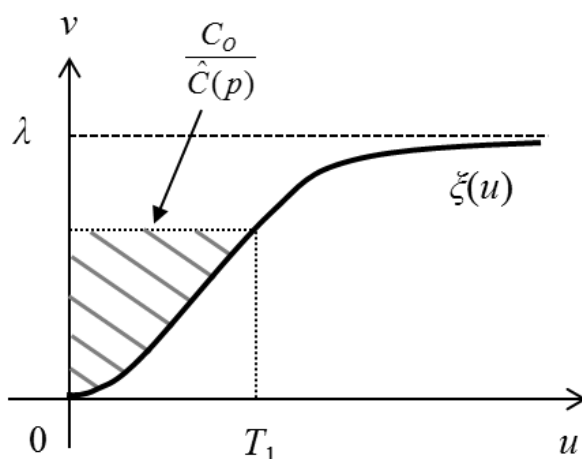


図 I.1 T_1 と $\xi(u)$ の関係

式(I.4)の右边は, $u=T$, $u=0$, $v=0$ 及び $v=\xi(u)$ で囲まれる図形から, $v=\xi(u)$ より下の部分を除いた図形の面積を表している. よって, 図 I.1 に示すように, 斜線部分 ($u=0$, $v=\xi(T_1)$, $v=\xi(u)$ で囲まれる図形) の面積が $C_o / \hat{C}(p)$ と等しいとき式(I.4)は成り立つ.

さて, $\gamma_R(T)$ の分子は $v=\xi(T)$, $v=0$, $u=T$ で囲まれる面積と $C_o / \hat{C}(p)$ の和を表し, 分母は $u=T$, $u=0$, $v=0$ 及び $v=\xi(T)$ で囲まれる長方形の面積であるから, 明らかに

$$\gamma_R(T_1)=1 \quad (I.5)$$

が成り立つ． $T \leq T_1$ の範囲では， $\gamma_R(T) \geq 1 > \gamma_L(T)$ が成り立つため， 式(I.2) は解をもたず， コストレートは狭義単調減少する．

次に， $S(T)$ を図 I.1 で $v=\lambda, v=\xi(u)$ ， $u=0$ 及び $u=T$ で囲まれた面積と定めると，

$$S(T) = \lambda T - \int_0^T \xi(u) du \quad (I.6)$$

は式(4.38)と等しい． T が正の無限大に近づくとき，

$$S(\infty) = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^u \exp[-(1-p)\{H(u)-H(y)\}-\lambda(u-y)] dy du + \lambda \int_0^\infty \exp[-(1-p)H(u)-\lambda u] du \quad (I.7)$$

となる． 式(I.4)の右辺の最大値は $S(\infty)$ に一致するから， 次の不等式，

$$S(\infty) \geq \frac{C_o}{\hat{C}(p)} \quad (I.8)$$

は， T_1 が存在するための必要十分条件となっている． さらに， この不等式は式(I.2)の解が存在するための必要条件である．

以下， 故障が形状パラメータ β のワイブル分布に従う場合を考える． まず， $\beta \leq 2$ のとき， $S(\infty)=\infty$ が成り立つ (I.4 節参照)． 次に， T が非常に大きいときの $\gamma_L(T)$ と $\gamma_R(T)$ の大小関係を調べる． $\gamma_L(T) > \gamma_R(T)$ が成り立てば， 式(I.2)は少なくとも一つの解をもつ． それぞれを 1 から引いた値である

$$1 - \gamma_L(T) = \frac{1 - e^{-\lambda T} (1 + \lambda T)}{\lambda T (1 - e^{-\lambda T})} \quad (I.9)$$

と

$$1-\gamma_R(T)=\frac{T\xi(T)-\int_0^T\xi(u)du-C_o/\hat{C}(p)}{T\xi(T)} \quad (\text{I.10})$$

を比較する． $1<\beta\leq 2$ のときは， $S(\infty)=\infty$ より式(I.10)右辺の分子は正の無限大に発散する． よって，

$$T\xi(T)-\int_0^T\xi(u)du-C_o/\hat{C}(p)>1-e^{-\lambda T}(1+\lambda T) \quad (\text{I.11})$$

が成り立つ． また， T が十分大きいとき式(I.9)及び(I.10)右辺の分母は等しいとみなせるから， $\gamma_L(T)>\gamma_R(T)$ と分かる． $\beta>2$ のとき， 十分大きな T に対して，

$$1-\gamma_L(T)\approx\frac{1}{\lambda T} \quad (\text{I.12})$$

が成り立つ． なぜなら， $\exp(-\lambda T)$ 及び $T\exp(-\lambda T)$ は $1/T$ よりも速く 0 に収束するからである． また， I.2 節の式(I.16)から明らかに $\xi(T)$ が λ に収束するのは $1/T$ が 0 に収束するより速いから，

$$1-\gamma_R(T)\approx\frac{1}{\lambda T}\left\{S(T)-\frac{C_o}{\hat{C}(p)}\right\} \quad (\text{I.13})$$

が成り立つ． よって， 式(I.12)及び(I.13)から $S(\infty)>1+C_o/\hat{C}(p)$ のとき十分大きい T に対して $\gamma_L(T)>\gamma_R(T)$ が成り立つ．

以上の議論から， $S(\infty)\leq C_o/\hat{C}(p)$ のとき， 式(I.2)の解は存在せず， 平均コストレートは T に関して単調減少する． $C_o/\hat{C}(p)<S(\infty)\leq C_o/\hat{C}(p)+1$ のとき， T_1 は存在するが， 式(I.2)の解が存在するかは分からない． $C_o/\hat{C}(p)+1<S(\infty)$ のとき， 式(I.2)は少なくとも一つ解をもつが， その数は定かではない．

I.2 $\xi(T)$ の挙動

前節の式(I.3)で表される $\xi(T)$ が0から λ までの狭義単調増加関数であることを示す．まず，変数変換して次式のように書き直す．

$$\xi(T) = \lambda^2 \int_0^T \psi(T, y) dy + \psi(T, T) \quad (\text{I.14})$$

ただし，

$$\psi(T, y) \equiv (1 - \exp[-(1-p)\{H(T) - H(T-y)\}])e^{-\lambda y} \quad (\text{I.15})$$

である． $\psi(T, y)$ の T に関する偏微分は

$$\frac{\partial \psi(T, y)}{\partial T} \equiv \exp[-(1-p)\{h(T) - h(T-y)\} - \lambda y] \geq 0 \quad (\text{I.16})$$

より，常に正となる．式(I.14)を微分すると，

$$\begin{aligned} \xi'(T) &= \lambda^2 \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \psi(T, w) dw + \lambda^2 \psi(T, T) + \lambda \frac{\partial}{\partial T} \psi(T, T) \\ &= \lambda^2 \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \psi(T, w) dw + \lambda(1-p)h(T) \exp\{-(1-p)H(T)\}e^{-\lambda T} > 0 \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

となる．また，

$$\lim_{T \rightarrow 0} \xi(T) = 0 \quad (\text{I.18})$$

であり，

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \xi(T) = \lambda^2 \int_0^\infty (1 \cdot e^{-\lambda y}) dy = \lambda \quad (\text{I.19})$$

であるから，命題は示された． ■

I.3 $\gamma_L(T)$ の挙動

式(I.2)の左辺である $\gamma_L(T)$ が $1/2$ から 1 までの狭義単調増加関数であることを示す．まず， $\gamma_L(T)$ の極限は，

$$\gamma_L(0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T} + \lambda T e^{-\lambda T}} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\lambda e^{-\lambda T}}{2\lambda e^{-\lambda T} - \lambda^2 T e^{-\lambda T}} = \frac{1}{2} \quad (\text{I.20})$$

$$\gamma_L(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T - 1/\lambda}{T} = 1 \quad (\text{I.21})$$

である．次に， $\gamma_L(T)$ の微分は，

$$\gamma'_L(T) = \frac{1}{\lambda T^2 (1 - e^{-\lambda T})^2} \{ -\lambda^2 T^2 e^{-\lambda T} + (1 - e^{-\lambda T})^2 \} \quad (\text{I.22})$$

となるが，式(I.22)右辺の中括弧内を $\gamma_{L1}(T)$ とおくと， $\gamma_{L1}(0)=0$ であり，

$$\gamma'_{L1}(T) = \lambda e^{-\lambda T} (-2\lambda T + \lambda^2 T^2 + 2 - 2e^{-\lambda T}) \quad (\text{I.23})$$

が成り立つ．また， $\gamma'_{L1}(0)=0$ である．さらに，式(I.23)右辺の括弧内を $\gamma_{L2}(T)$ とおくと， $\gamma_{L2}(0)=0$ であり，その微分は，

$$\gamma'_{L2}(T) = 2\lambda(-1 + \lambda T + e^{-\lambda T}) \quad (\text{I.24})$$

となる．ここで， $\gamma'_{L2}(0)=0$ かつ $\gamma''_{L2}(T) = 2\lambda^2(1 - e^{-\lambda T}) > 0$ が成り立つので，順に， $\gamma'_{L2}(T) > 0$ ， $\gamma_{L2}(T) > 0$ ， $\gamma'_{L1}(T) > 0$ ， $\gamma_{L1}(T) > 0$ が成り立ち，これより $\gamma'_L(T) > 0$ が成り立つ． ■

I.4 $S(\infty)$ の発散

式(I.7)において，形状パラメータ $\beta \leq 2$ のとき $S(\infty)=\infty$ となることを示すため，付録Hと同じ論法を用い，まず $\lim_{T \rightarrow \infty} TS'(T)$ が正の定数に収束す

ることを証明する． $S(T)$ の微分は次式となる．

$$\begin{aligned} S'(T) &= \lambda - \xi(T) \\ &= \lambda^2 \int_0^T \exp[-(1-p)\{H(T) - H(T-w)\} - \lambda w] dw + \lambda \exp[-(1-p)H(T) - \lambda T] \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

また， $S'(T) > 0$ が成り立つ．

次に，以下の補題を証明する．

補題

$l > 0$ ， d を定数とし， $\phi(z) = \exp(lz^2)$ とすると，

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T \int_d^{T+d} \phi(t) dt}{\int_d^{T+d} \phi(t) dt} = 1$$

が成り立つ．

(証明)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_d^{T+d} \phi(z) dz}{\phi(T+d)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi(T+d)}{2l(T+d)\phi(T+d)} = 0 \quad (\text{I.26})$$

が成り立つので，

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T \int_d^{T+d} \phi(z) dz}{\int_d^{T+d} z \phi(z) dz} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{\int_d^{T+d} \phi(z) dz}{T \phi(T+d)} + 1}{1 + \frac{d}{T}} = 1$$

となる． ■

次に，形状パラメータ $\beta=2$ のとき，式(I.25)の最右辺第1項中の指数関数の指数部は， η を尺度パラメータとして，

$$\frac{(1-p)}{\eta^2}(w^2 - 2wT) - \lambda w \quad (\text{I.27})$$

となるので，これを $lw^2 - 2lwT - mw$ と置き換える．ただし， $l > 0$ かつ $m > 0$ である．式(I.25)の最右辺第2項については，

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \lambda \exp\{-(1-p)H(T) - \lambda T\} = 0 \quad (\text{I.28})$$

が成り立つ．よって， $TS'(T)$ の極限は，

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} TS'(T) &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \lambda^2 \int_0^T \exp\left\{l\left(w - \frac{2lT+m}{2l}\right)^2 - \frac{(2lT+m)^2}{4l}\right\} dw \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda^2 \exp\left\{-\frac{(2lT+m)^2}{4l}\right\} T \int_{-T-d}^{-d} \exp(lz^2) dz \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

である．ただし， $d = m/(2l)$ とおいた．式(I.29)は補題を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda^2 \exp\left\{-\frac{(2lT+m)^2}{4l}\right\} \int_0^{T+d} z \exp(lz^2) dz \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda^2 \left(\frac{1}{2l} \left[1 - \exp\left\{-\frac{(2lT-m)^2}{4l}\right\} \right] \right) = \frac{\lambda^2}{2l} \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

となる．よって， $TS'(T)$ が正の定数に収束するので，任意の正の値 ε に対し， $T > T_0$ ならば

$$\left| TS'(T) - \frac{\lambda^2}{2l} \right| < \varepsilon \quad (\text{I.31})$$

を満たす $T_0 > 0$ が必ず存在する．また， $S'(T) > 0$ より，式(I.31)を変形して積分すると，

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{\lambda^2/(2l) - \varepsilon}{T} dT < \int_{T_0}^{\infty} S'(T) dT < \int_0^{\infty} S'(T) dT = S(\infty) \quad (\text{I.32})$$

となる．上式の最左辺は正の無限大に発散するから， $S(\infty)=\infty$ が示される．

また，形状パラメータが 2 未満のとき，十分大きな T に対して $S'(T)$ は形状パラメータが 2 のときよりも大きくなるので， $S(\infty)=\infty$ となるのは明らかである． ■

付録 J 平均コストの挙動の分類

ここでは、5.3.3.1 節における、コストの τ_1 方向の挙動について説明する。J.1 節で平均コストの挙動について分析し、J.2 節で補題を証明する。

J.1 挙動分析

式(5.9)を τ_1 に関して微分すると、次式を得る。

$$\frac{\partial C_V(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = h e^{-\lambda \tau_1} \left[\frac{(h+\lambda)^2 e^{-h \tau_1}}{\{\lambda + h e^{-(h+\lambda) \tau_1}\}^2} C_1 - (1 - e^{-\lambda \tau_2}) C_2 - \frac{\lambda}{h+\lambda} e^{-\lambda \tau_2} C_3 \right] \quad (\text{J.1})$$

ここで、式(J.1)右辺の大括弧内を $Q(\tau_1)$ とおくと、その極限值は式(J.2)及び(J.3)となる。

$$Q(0) = C_1 - (1 - e^{-\lambda \tau_2}) C_2 - \frac{\lambda}{h+\lambda} e^{-\lambda \tau_2} C_3 \quad (\text{J.2})$$

$$Q(\infty) = -(1 - e^{-\lambda \tau_2}) C_2 - \frac{\lambda}{h+\lambda} e^{-\lambda \tau_2} C_3 < 0 \quad (\text{J.3})$$

$Q(\tau_1)$ を τ_1 に関して微分すると、次式を得る。

$$Q'(\tau_1) = \frac{h(h+\lambda)^2 e^{-h \tau_1}}{\{\lambda + h e^{-(h+\lambda) \tau_1}\}^3} \{(h+2\lambda) e^{-(h+\lambda) \tau_1} - \lambda\} C_1 \quad (\text{J.4})$$

式(J.4)が 0 となる方程式の解 $\hat{\tau}_1$ は唯一存在し、

$$\hat{\tau}_1 = -\frac{1}{h+\lambda} \ln \frac{\lambda}{h+2\lambda} \quad (\text{J.5})$$

で表される。 $Q(\tau_1)$ は $\tau_1 < \hat{\tau}_1$ の範囲で増加、 $\tau_1 > \hat{\tau}_1$ の範囲で減少する。よっ

て，式(J.2)が正，即ち

$$\tau_2 < -\frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{C_2 - C_1}{C_2 - \lambda C_3 / (h + \lambda)} \right\} \quad (\text{J.6})$$

を満たすとき，コストは極大値を唯一もつ単峰関数となる．なお， $C_1 \geq C_3 > \{\lambda / (h + \lambda)\} C_3$ より式(J.6)の右辺は正となり，式(J.6)を満たす τ_2 の範囲は必ず存在する．

さて，式(J.2)が負のとき，つまり式(J.6)が満たされない場合について考える． $Q(\tau_1)$ の最大値は

$$Q(\hat{\tau}_1) = KC_1 - (1 - e^{-\lambda \tau_2})C_2 - \frac{\lambda}{h + \lambda} e^{-\lambda \tau_2} C_3 \quad (\text{J.7})$$

ここで， K は式(5.11)で定義される．式(J.7)が正となるとき，コスト関数は極値を2個もつ．即ち， τ_1 が0から増加するとともに，始めは減少し，次に増加し，最後に再び減少する（減少・増加・減少型と呼ぶ）．この条件を変形すると

$$e^{-\lambda \tau_2} > \frac{C_2 - KC_1}{C_2 - \frac{\lambda}{h + \lambda} C_3} \quad (\text{J.8})$$

を得る．式(J.8)右辺の分子が0以下，つまり修理コストの関係が

$$\frac{C_2}{C_1} \leq K \quad (\text{J.9})$$

を満たすとき，式(J.8)は $\tau_2 < \infty$ で常に成立する．式(J.9)を満たさないときでも，

$$\tau_2 < -\frac{1}{\lambda} \ln \left\{ \frac{C_2 - KC_1}{C_2 - \frac{\lambda}{h+\lambda} C_3} \right\} \quad (\text{J.10})$$

の範囲で式(J.8)は成立する．なお，式(J.9)を満たさないとき， $K>1$ より (J.2 節参照) 式(J.10)の右辺は正となるので， τ_2 がこの値よりも小さい範囲で式(J.10)は成り立つ．また，コストの関係が式(J.9)を満たさず，かつ τ_2 が式(J.10)を満たさないとき (つまり τ_2 が式(J.10)右辺より大のとき)， $Q(\tau_1)$ は常に負となるので，コストは単調減少する．

以上より，時間幅 τ_1 に関するコストの挙動は図 5.3 のとおりとなる．なお， $K>1$ より，式(J.10)は式(J.6)の十分条件となっている．

J.2 $K>1$ の証明

式(5.11)で定義される $K>1$ を証明する． K を， $\rho \equiv h/\lambda$ ($\rho>0$) の関数

$$K(\rho) \equiv \frac{1}{4} (2+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \quad (\text{J.11})$$

とみなすと，その微分は

$$K'(\rho) = \frac{K(\rho)}{(\rho+1)^2} \{\rho+1 - \ln(\rho+2)\} \quad (\text{J.12})$$

となる．式(J.12)右辺の中括弧内を $U(\rho)$ とおくと， $K(\rho)>0$ であるから，式(J.12)の符号は $U(\rho)$ と一致する．また，

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} U(\rho) = 1 - \ln 2 > 0 \quad (\text{J.13})$$

かつ

$$U'(\rho) = 1 - \frac{1}{\rho+2} = \frac{\rho+1}{\rho+2} > 0 \quad (\text{J.14})$$

より, $U(\rho) > 0$ が成り立つ. さらに,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(\rho) = 1 \quad (\text{J.15})$$

であるから, $K(\rho) > 1$ が成り立つ. ■

付録K 平均アベイラビリティの挙動の分類

ここでは，5.3.4.1 節の分類について説明する．まず，アベイラビリティを表す式(5.28)の微分式の一部を，

$$V(\tau_1) \equiv 2h\lambda\tilde{S}(\tau_1) + \{2h - (h+\lambda)e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)}\}\tilde{S}'(\tau_1) + h\lambda(h+\lambda) \quad (\text{K.1})$$

と定義すると， $V(\tau_1)$ の符号はアベイラビリティの増減と一致する．ここで，

$$\tilde{S}(0) = 0 \quad (\text{K.2})$$

$$\tilde{S}(\infty) = h(h+\lambda)\delta \quad (\text{K.3})$$

である．また， $\tilde{S}(\tau_1)$ の微分は

$$\tilde{S}'(\tau_1) = h\lambda(h+\lambda)^3\delta \frac{e^{-(h+\lambda)\tau_1}}{\{\lambda + he^{-(h+\lambda)\tau_1}\}^2} \quad (\text{K.4})$$

であり，その極限值は，

$$\tilde{S}'(0) = h\lambda(h+\lambda)\delta \quad (\text{K.5})$$

$$\tilde{S}'(\infty) = 0 \quad (\text{K.6})$$

である．さて， $\tau_1=0$ のとき，

$$V(0) = h\lambda(h+\lambda)\{2h\delta - (h+\lambda)\delta e^{\lambda\tau_2} + 1\} \quad (\text{K.7})$$

となるが，この値は5.3.4.1 節における（イ）の条件，即ち

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h+1/\delta}{h+\lambda} \right) < \tau_2$$

を満たすとき負となる．つまり，アベイラビリティの $\tau_1=0$ での τ_1 方向の傾きは負である．また， $\tau_1 \rightarrow \infty$ のとき，

$$V(\infty) = 2\lambda h^2(h+\lambda)\delta + h\lambda(h+\lambda) - \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda h(h+\lambda)^4 \delta \exp(-h\tau_1 + \lambda\tau_2)}{\{\lambda + h e^{-(h+\lambda)\tau_1}\}^2} \right] > 0 \quad (\text{K.8})$$

となる．次に， $V(\tau_1)$ を微分すると次式を得る．

$$\begin{aligned} V'(\tau_1) &= \{2h - (h+\lambda)e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)}\} \{\lambda \tilde{S}'(\tau_1) + \tilde{S}''(\tau_1)\} \\ &= \{2h - (h+\lambda)e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)}\} \left[\lambda - \frac{(h+\lambda)\{\lambda - h e^{-(h+\lambda)\tau_1}\}}{\lambda + h e^{-(h+\lambda)\tau_1}} \right] \tilde{S}'(\tau_1) \end{aligned} \quad (\text{K.9})$$

$\tau_1 < \infty$ で $\tilde{S}'(\tau_1) > 0$ であるから，式(K.9)が 0 となるのは，右辺の $\{2h - (h+\lambda)e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)}\}$ または大括弧内が 0 となる場合である．方程式

$$2h - (h+\lambda)e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)} = 0 \quad (\text{K.10})$$

の解 $\bar{\tau}_1$ は，

$$\bar{\tau}_1 = -\tau_2 + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h}{h+\lambda} \right) \quad (\text{K.11})$$

であり， $\{2h - (h+\lambda)e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)}\}$ は $\tau_1 < \bar{\tau}_1$ のとき正， $\tau_1 > \bar{\tau}_1$ のとき負となる．なお，式(K.11)は常に正の値をとるとは限らない． τ_2 が条件（イ）を満たすとき，式(K.11)は負となる．一方，式(K.9)右辺の大括弧内が 0 となる解 $\bar{\tau}_1$ は唯一存在し，

$$\bar{\tau}_1 = -\frac{1}{h+\lambda} \ln \left(\frac{\lambda}{2\lambda+h} \right) \quad (\text{K.12})$$

である．式(K.9)右辺の大括弧内は $\tau_1 < \bar{\tau}_1$ で正であり， $\tau_1 > \bar{\tau}_1$ で負となる．よって，式(K.9)が 0 となる解は高々 2 個存在する．

以上の議論より，アベイラビリティの挙動は， $V(0)$ 及び $V'(\tau_1)$ の符号を勘案して，以下の条件（甲），（乙）及び（丙）に分類できる．

条件（甲）： $\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h+1/\delta}{h+\lambda} \right) < \tau_2$ （5.3.4.1 節の条件（イ）と同一）

条件（乙）： $\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h}{h+\lambda} \right) < \tau_2 < \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h+1/\delta}{h+\lambda} \right)$

条件（丙）： $\tau_2 < \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2h}{h+\lambda} \right)$

条件（甲）を満たすとき，

$$2h - (h+\lambda)e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)} < 0 \quad (\text{K.13})$$

なので $V'(\tau_1)$ は τ_1 の増加とともに負から正へと変化する．つまり $V(\tau_1)$ は極小値を唯一もつ．また， $V(0) < 0$ かつ $V(\infty) > 0$ なので， $V(\tau_1) = 0$ の解は唯一存在し， $\tau_1 = \bar{\tau}_1$ のときである．よって，アベイラビリティは極小値を唯一もつ単峰関数となる．

条件（乙）は 5.3.4.1 節における条件（ロ）の十分条件となっている．これを満たすとき，

$$2h - (h+\lambda)e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)} < 0 \quad (\text{K.14})$$

なので， $V'(\tau_1)$ は τ_1 の増加とともに負から正へと変化する．つまり $V(\tau_1)$ は極小値を唯一もつ．また， $V(0) > 0$ かつ $V(\infty) > 0$ なので， $V(\tau_1)$ の最小値，

$$V(\bar{\tau}_1) = h\lambda(h+\lambda) \left[h\delta + 1 + \frac{1}{4}(2\lambda+h)\delta \left\{ \frac{2h}{\lambda} - \left(1 + \frac{h}{\lambda} \right) \left(2 + \frac{h}{\lambda} \right)^{\frac{\lambda}{h+\lambda}} e^{\lambda\tau_2} \right\} \right] \quad (\text{K.15})$$

が正，つまり式(5.30)の条件を満たすとき， $V(\tau_1)$ は常に正となるからアベイラビリティは単調増加となる．式(5.30)を満たさないとき， $V(\tau_1)$ の符号は正から負，負から正へ変化するのので，アベイラビリティは増加・減少・増加型となる．

条件（丙）を満たすとき，5.3.4.1 節における条件（ロ）または（ハ）

を満たす．このとき， $V'(\tau_1)$ の符号は τ_1 の増加とともに正から負，負から正へ変化する．また $V(0)>0$ かつ $V(\infty)>0$ なので $V(\tau_1)$ は $\tau_1 = \max(\tilde{\tau}_1, \bar{\tau}_1)$ で極小値をとる．この比較対象のうち，前者の方が大きいとき，つまり条件（ハ）を満たすとき， $V(\tau_1)$ が常に正となることを以下で証明する．

（証明）

$V(\tilde{\tau}_1)$ が常に正となることを示せば十分である．

$$V(\tilde{\tau}_1) = h\lambda(h+\lambda)L(\tau_2), \quad (\text{K.16})$$

ここで，

$$L(\tau_2) \equiv \frac{2h\lambda\delta \left\{ 1 - \left(\frac{h+\lambda}{2h} \right)^{\frac{h+\lambda}{\lambda}} e^{(h+\lambda)\tau_2} \right\}}{\lambda + h \left(\frac{h+\lambda}{2h} \right)^{\frac{h+\lambda}{\lambda}} e^{(h+\lambda)\tau_2}} + 1 \quad (\text{K.17})$$

である．式(K.17)の微分は

$$L'(\tau_2) = - \frac{2h\lambda\delta(h+\lambda)^2 \left(\frac{h+\lambda}{2h} \right)^{\frac{h+\lambda}{\lambda}}}{\left\{ \lambda + h \left(\frac{h+\lambda}{2h} \right)^{\frac{h+\lambda}{\lambda}} e^{(h+\lambda)\tau_2} \right\}^2} e^{(h+\lambda)\tau_2} < 0 \quad (\text{K.18})$$

となるので，式(K.17)の下限は τ_2 が最大るときだが，このとき，第1項の分子は

$$\frac{2h\lambda\delta(h+\lambda)}{h+2\lambda} > 0 \quad (\text{K.19})$$

となるので，式(K.17)は常に正となる．よって $V(\tilde{\tau}_1)>0$ が成り立つ． ■

以上から，条件（ハ）を満たすときは $V(\tau_1) > 0$ であり，アベイラビリティは単調増加すると言える．一方，条件（ハ）を満たさないとき（つまり条件（ロ）を満たすとき）， $V(\tau_1)$ の極小値は式(K.15)となるから，アベイラビリティは式(5.30)を満たすとき単調増加，満たさないとき増加・減少・増加型となる．本付録の議論をまとめると，平均アベイラビリティの τ_1 方向への挙動は図 5.4 のとおりとなる。

付録 L 式(5.30)を満たす τ_2 の存在条件

ここでは，式(5.30)を満たす τ_2 は $\delta \leq 1/\lambda$ または $h > 1.0865\lambda$ のとき必ず存在することについて説明する．式(5.30)右辺が正，つまり自然対数の真数が1より大きいとする不等式を，J.2 節と同じく $\rho (>0)$ を用いて変形すると，

$$\frac{1}{\delta\lambda} > \frac{\rho+2}{4} \{(\rho+1)(\rho+2)^{\frac{1}{\rho+1}} - 2\rho\} - \rho \quad (\text{L.1})$$

となる．式(L.1)の右辺が 0 以下のとき，式(L.1)は常に成立するので，式(5.30)を満たす τ_2 は必ず存在する．以下で，式(L.1)右辺が 0 となる ρ が唯一存在することを示す．

(証明)

式(L.1)の右辺は $\rho \rightarrow 0$ のとき 1 であり， $\rho \rightarrow \infty$ のとき

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \left\{ (\rho+2)^{\frac{1}{\rho+1}} \right\} = 0 \quad (\text{L.2})$$

より，負の無限大に発散する．次に，式(L.1)の右辺を微分すると，

$$-\frac{1}{4}(\rho+2)^{\frac{1}{\rho+1}} \left[\frac{\rho+2}{\rho+1} \ln(\rho+2) + 2(\rho+2)^{\frac{\rho}{\rho+1}} M(\rho) \right], \quad (\text{L.3})$$

ここで，

$$M(\rho) \equiv 2 - (\rho+2)^{\frac{1}{\rho+1}} \quad (\text{L.4})$$

となる．これは，

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} M(\rho) = 0 \quad (\text{L.5})$$

かつ

$$M'(\rho) = -\frac{(\rho+2)^{\frac{1}{\rho+1}}}{(\rho+1)^2} \left\{ \frac{\rho+1}{\rho+2} - \ln(\rho+2) \right\} \quad (\text{L.6})$$

が成り立つ．さらに，式(L.6)右辺の中括弧内を $m(\rho)$ とおくと，

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} m(\rho) = \frac{1}{2} - \ln 2 = -0.193 \dots < 0 \quad (\text{L.7})$$

であり，

$$m'(\rho) = \frac{\frac{1}{\rho+2} - 1}{\rho+2} = -\frac{\rho+1}{(\rho+2)^2} < 0 \quad (\text{L.8})$$

となるので， $m(\rho) < 0$ である．よって， $M'(\rho) > 0$ より， $M(\rho)$ は常に正となるので，これと

$$\frac{(\rho+2)\ln(\rho+2)}{\rho+1} > 0 \quad (\text{L.9})$$

より，式(L.3)は常に負となる．以上から，式(L.1)右辺が 0 となる ρ は唯一存在する． ■

この解は数値的に $1.0864 \dots$ と求められる．よって， $h > 1.0865\lambda$ のとき，式(L.1)の右辺は負となり，式(5.30)を満たす τ_2 は必ず存在する．また，以上の議論から式(L.1)右辺は単調減少し，その上限は1であるから， $\delta \leq 1/\lambda$ のとき式(5.30)を満たす τ_2 は必ず存在する．

付録M 条件（ハ）を満たす τ_2 の非存在条件

5.3.4.1 節における条件（ハ）を満たす τ_2 は $h < 2.9769\lambda$ のとき存在しないことを説明する．条件（ハ）右辺が0となる方程式は

$$(\rho+2)^{\frac{-1}{\rho+1}} = \frac{\rho+1}{2\rho} \quad (\text{M.1})$$

と変形できる．この解が唯一存在することを以下で示す．

（証明）

式(M.1)右辺は ∞ から $1/2$ へ単調減少する．左辺を $\mathcal{G}(\rho)$ とおくと，この微分は

$$\mathcal{G}'(\rho) = \frac{\mathcal{G}(\rho)}{(\rho+1)^2} \left\{ \ln(\rho+2) - 1 + \frac{1}{\rho+2} \right\} \quad (\text{M.2})$$

となる．式(M.2)の符号は $\mathcal{G}(\rho) > 0$ より中括弧内と一致し， $\rho \rightarrow 0$ のとき $\ln 2 - 1/2 = 0.1931 \cdots$ より正である．また，中括弧内を微分すると

$$\frac{1 - \frac{1}{\rho+2}}{\rho+2} = \frac{\rho+1}{(\rho+2)^2} > 0 \quad (\text{M.3})$$

となるので，式(M.2)は常に正と言える．よって，

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \mathcal{G}(\rho) = 0 \quad (\text{M.4})$$

より式(M.1)の左辺は $1/2$ から 1 へと単調増加するので，式(M.1)を満たす ρ は唯一存在する． ■

この解は数値的に $2.9769\cdots$ と求められ、 ρ がこの値より小さいとき、条件（ハ）の右辺は負となるので、条件（ハ）を満たす τ_2 は存在しない。

付録N 平均アベイラビリティの単峰性の証明

ここでは、5.4.3.2節における基本モデルの平均アベイラビリティが、 τ_1 に関して単峰であることを証明する。

まず、アベイラビリティを τ_1 に関して微分すると、次式を得る。

$$\frac{\partial A(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = \frac{he^{h\tau_1}[\{1 - e^{-h(T-\tau_2)}\}h(T-2\tau_1) - 2h\tau_2(1 - e^{-h\tau_1})]}{\{h(T-2\tau_1) + 2(e^{h\tau_1} - 1)\}^2} \quad (\text{N.1})$$

さて、

$$\left. \frac{\partial A(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} \right|_{\tau_1=0} = \frac{1}{hT^2} [hT\{1 - e^{-h(T-\tau_2)}\}] > 0 \quad (\text{N.2})$$

が成り立つので、式(N.1)が 0 となる方程式は、 $\tau_1 \neq 0$ のとき、次式に変形できる。

$$\frac{T-2\tau_1}{1-e^{-h\tau_1}} = \frac{2\tau_2}{1-e^{-h(T-\tau_2)}} \quad (\text{N.3})$$

ここで、 $q(\tau_1)$ ($0 < \tau_1 \leq T - \tau_2$) を式(N.3)の左辺とする。以下で、 $q(\tau_1)$ が単調減少関数であり、式(N.3)が唯一解をもつことを証明する。

(証明)

まず、 $q(\tau_1)$ の極限は、

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} q(\tau_1) = \infty \quad (\text{N.4})$$

及び

$$q(T-\tau_2) = \frac{-T+2\tau_2}{1-e^{-h(T-\tau_2)}} \quad (\text{N.5})$$

であり，式(N.5)は式(N.3)の右辺よりも小さい．よって， $q(\tau_1)$ の連続性から式(N.3)は少なくとも一つ解をもつといえる．

次に， $q(\tau_1)$ が単調減少関数であることを示す． $q(\tau_1)$ を微分すると，

$$q'(\tau_1) = \frac{e^{-h\tau_1}\{-h(T-2\tau_1)+2\}-2}{(1-e^{-h\tau_1})^2} \quad (\text{N.6})$$

となる．この極限值は，

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} q'(\tau_1) = -\infty, \quad (\text{N.7})$$

$$q'(T-\tau_2) = \frac{e^{-h(T-\tau_2)}\{h(T-2\tau_2)+2\}-2}{\{1-e^{-h(T-\tau_2)}\}^2} \quad (\text{N.8})$$

である． $r(\tau_1)$ を式(N.6)の分子とすると，この符号は式(N.8)と一致する．その微分は，

$$r'(\tau_1) = h^2 e^{-\tau_1} (T-2\tau_1) \quad (\text{N.9})$$

である．式(N.9)は， $\tau_1 < T/2$ のとき正であり， $\tau_1 > T/2$ のとき負となる．よって， $r(\tau_1)$ の挙動は τ_1 の最大値，つまり $T-\tau_2$ と $T/2$ の大小関係によって場合分けできる．

(i) $\tau_2 > T/2$ のとき

このとき，式(N.9)は常に正となる．よって， $r(\tau_1)$ は $-hT$ から

$$r(T-\tau_2) = e^{-h(T-\tau_2)}\{h(T-2\tau_2)+2\}-2 \quad (\text{N.10})$$

まで単調増加する．式(N.10)の右辺を $u(\tau_2)$ とおく ($\tau_2 > T/2$)．

$$u'(\tau_2) = h^2 e^{-h(T-\tau_2)} (T - 2\tau_2) < 0 \quad (\text{N.11})$$

より, $u(\tau_2)$ の最大値は

$$u(0) = e^{-hT} (hT + 2) - 2 \quad (\text{N.12})$$

である. 式(N.12)は hT の値に関わらず常に負となる. よって, $u(\tau_2) < 0$ であるから, $r(\tau_1)$ は常に負となる. 以上から, $q(\tau_1)$ は単調減少関数といえる.

(ii) $\tau_2 < T/2$ のとき

このとき, 式(N.9)の符号は $\tau_1 = T/2$ で正から負に変化する. よって, $r(\tau_1)$ の最大値は

$$r\left(\frac{T}{2}\right) = -2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{hT}{2}\right) \right\} < 0 \quad (\text{N.13})$$

であるので, $r(\tau_1)$ は常に負となり, $q(\tau_1)$ が単調減少関数といえる.

以上の議論から, 式(N.3)が唯一解をもつことが証明された. ■

謝 辞

本論文は、防衛大学校理工学研究科在学中の研究をまとめたものです。在学中、実に多くの方の指導・鞭撻に支えられました。

指導教官として終始おおらかに指導して下さいった弓削哲史教授及び広い視点から示唆に富んだ指導を頂きました柳繁名誉教授に深く感謝致します。本論文をまとめるにあたり、中野俊樹教授、板宮敬悦教授、首都大学東京山本久志教授に有益なご指導を賜りましたことを心よりお礼申し上げます。また、研究を進める中で、学会でお会いする度に助言して下さいった愛知工業大学中川覃夫客員教授、釜山大学 W. Y. Yun 教授、広島大学土肥正教授、サラゴサ大学 M. D. Berrade 教授、広島大学岡村寛之准教授、愛知工科大学水谷聡志准教授に感謝申し上げます。

研究科系の福田谷係長、居波係長、寺内係長、杉野 2 曹、矢野 1 曹、菊地事務官、浦崎事務官、服部事務官及び高橋事務官、学科事務室の佐藤 2 曹、山本 2 曹、佐藤さん及び濱田さん並びに学群図書室の関矢さん及び伊藤さんには、出張の調整や郵便の手配、論文探し等重要な場面で、私の要求する無理難題や、休みない些末な質問にも笑顔で対応して頂き感謝しております。

また、長期間学業に専念できる環境を与えて下さった海上自衛隊の関係各位にお礼を申し上げます。ありがとうございました。

以下、5 年間を振り返りつつ前出以外の方々へ謝意を表します。

信頼性を学ぶことは前期課程入校直後の宴会で決まりました。海上自衛隊でホットであったこの分野を深く学びたいと思ったからです⁵。一通り基本を勉強した後中川先生の本[5]を読み、単純な仮定の中に存在する最適化問題にパズルのような面白さを覚え、保全方策を研究するようになりました。M1 の 3 月に初め

⁵ 先生が酒呑みだったからという説もある。

ての学会発表で新潟へ行きました。研究室の先輩會津 1 尉は直後に卒業されましたが、初稿の添削して頂いた事に感謝します。⁶その後すぐ、研究を頑張れば学会旅行で良い思いができるという法則を発見し、熱心に励みました。アメリカ、スペイン等色々な所に行かせて頂きました。M2 の 5 月頃後期課程進学の話があり、研究生活に満足していた私は応募を即決しました。

後期課程に入ってから、体調が悪い時期や研究が思うように進まなかった時期もありました⁷。そんな頃研究室に入ってきた丸山 2 尉のほんわかとした性格には良い影響を受けました⁸。また、学会等で会ったときに馬鹿話や研究トークで盛り上がった海上保安大学校齋藤先生、青山学院大学高橋先生、法政大学太田君、首都大学東京中村君にはここで謝意を表すとともに、今後の活躍をお祈りします。D1 の終わり頃からは数理的に議論する力がつき、研究の質も少しは向上したように思います。このあたりの研究は軍艦が対象だったので、運用のプロである海上自衛隊同期の伊吹・濱田・向川・北原 1 尉に相談しました。実運用の視点からモデルの妥当性に関して意見をくれた彼らに感謝しています。D2 の後半からは研究以外にも手を出す余裕が出始め、仏陸軍士官学校への短期留学や、船でサハリンに旅行するため研究会が稚内で開催されるよう画策する⁹等、充実した学生生活を送りました。留学の調整では森下研究科主事、サハリン旅行では同行を決断して下さった金城学院大学中村先生に感謝します。また、当時出産を控えていた妻が快く渡航を認めてくれた事は生涯忘れません。

これで私の研究生活は一旦幕を閉じます。今後どのような知的
好奇心・知的格闘が待っていて、自分を成長させてくれるか楽しみにしつつ筆を置きます。

⁶ 初めは規定枚数を守るため 4pt で数式を書く等滅茶苦茶な体裁だった。

⁷ 本論文の 3 章の研究を終えたあたりで、次のネタに困っていた。

⁸ 會津 1 尉に対してもだが、他にも多々感謝していることを明記する。

⁹ サハリンで開催するよう仕向けた試みは失敗に終わった。

参考文献

- [1] 日本信頼性学会編，新版 信頼性ハンドブック，日科技連出版社，2014
- [2] R. E. Barlow and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, 1965.
- [3] Y. Asiedu and P. Gu, “Product Life Cycle Cost Analysis: State of the Art Review,” *International Journal of Production Research*, Vol.36, No.4, pp.883-908, 1998.
- [4] 日本工業規格 (JIS Z8115:2000), 信頼性用語 Glossary of Terms Used in Dependability, 日本規格協会, 2000.
- [5] T. Nakagawa, *Maintenance Theory of Reliability*, Springer, 2005.
- [6] K. Ito and T. Nakagawa, “Optimal Inspection Policies for a System in Storage,” *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.24, No.1/2, pp.87-90, 1992.
- [7] K. Ito and T. Nakagawa, “An Optimal Inspection Policy for a Storage System with High Reliability,” *Microelectronics Reliability*, Vol.36, No.6, pp.875-882, 1995.
- [8] K. Ito and T. Nakagawa, “Optimal Inspection Policies for a Storage System with Degradation at Periodic Tests,” *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.31, No.10-12, pp.191-195, 2000.
- [9] K. Ito and T. Nakagawa, “An Optimal Inspection Policy for a Storage System with Three Types of Hazard Rate Functions,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.38, No.4, pp.423-431, 1995.
- [10] K. Ito, T. Nakagawa and K. Nishi, “Extended Optimal

- Inspection Policies for a System in Storage,” *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.22, No.10-12, pp.83-78, 1995.
- [11] F. Beichelt, “Minimax Inspection Strategies for Single Unit System,” *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.28, No.3, pp.375-381, 1981.
- [12] T. Nakagawa, *Random Maintenance Policies*, Springer-Verlag London, 2014.
- [13] M. Chen, S. Mizutani, and T. Nakagawa, “Random and Age Replacement Policies,” *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, Vol.17, No.01, pp.27-39, 2010.
- [14] J. B. Keller, “Optimum Checking Schedules for Systems Subject to Random Failure,” *Management Science*, Vol.21, No.3, pp.256-260, 1974.
- [15] N. Kaio and S. Osaki, “Some Remarks on Optimum Inspection Policies,” *IEEE Trans. on Reliability*, Vol.33, No.4, pp.277-279, 1984.
- [16] T. Nakagawa and S. Mizutani, “A Summary of Maintenance Policies for a Finite Interval,” *Reliability and System Safety*, Vol.94, No.1, pp.89-96, 2009.
- [17] M. D. Berrade, C. A. V. Cavalcante and P. A. Scarf, “Modelling Imperfect Inspection over a Finite Horizon,” *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.111, pp.18-29, 2013.
- [18] M. D. Berrade, C. A. V. Cavalcante and P. A. Scarf, “Maintenance Scheduling of a Protection System Subject to Imperfect Inspection and Replacement,” *European Journal of Operational Research*, Vol.218, No.3, pp.716-725, 2012.
- [19] C. K. Chou and D. A. Bulter, “Assessment of Hazardous-inspection Policies,” *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.30, No.1, pp.171-177, 1983.

- [20] E. Menipaz, "Cost Optimization of Some Stochastic Maintenance Policies," IEEE Trans. on Reliability Vol.28, No.2, pp.133-136, 1979.
- [21] M. Kijima, "Some Results for Repairable System with General Repair," Journal of Applied Probability, Vol.26, No.1, pp.89-102, 1989.
- [22] R. E. Barlow and L. C. Hunter, "Optimum Preventive Maintenance Policies," Journal of the Operations Research Society of America, Vol.8, No.1, pp.90-100, 1960.
- [23] T. Nakagawa and M. Kowada, "Analysis of a System with Minimal Repair and its Application to Replacement Policy," European Journal of Operational Research, Vol.12, No.2, pp.176-182, 1983.
- [24] M. Brown and F. Proschan, "Imperfect Repair," Journal of Applied Probability, Vol.20, No.4, pp.851-859, 1983.
- [25] H. W. Block, W. S. Borges and T. H. Savits, "Age-Dependent Minimal Repair," Journal of Applied Probability, Vol.22, No.2, pp.370-385, 1985.
- [26] M. Kijima, "Some Results for Repairable System with General Repair," Journal of Applied Probability, Vol.26, No.1, pp.89-102, 1989.
- [27] G. Last and R. Szekli, "Stochastic Comparison of Repairable Systems by Coupling," Journal of Applied Probability, Vol.35, No.2, pp.348-370, 1998.
- [28] G. Last and R. Szekli, "Time and Palm Stationarity of Repairable Systems," Stochastic Processes and their Applications, Vol.79, No.1, pp.17-43, 1999.
- [29] C. Dorado, M. Hollander and J. Sethuraman, "Nonparametric Estimation for a General Repair Model," The Annals of

- Statistics, Vol.25, No.3, pp.1140-1160, 1997.
- [30] C. E. Love, Z. G. Zhan, M. A. Zitron and R. Guo, "A Discrete Semi-Markov Decision Model to Determine the Optimal Repair/Replacement Policy under General Repair," *European Journal of Operational Research*, Vol.125, No.2, pp.398-409, 2000.
 - [31] M. Tanwar, R. N. Rai and N. Bolia, "Imperfect Repair Modeling Using Kijima Type Generalized Renewal Process," *Reliability Engineering and System Safety*, Vol.124, No.4, pp.24-31, 2014.
 - [32] W. Si and Q. Yang, "A Generalized Mixed Effect Kijima Model and Application in Optimal Maintenance Planning," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol.65, No.3, pp.1551-1561, 2016.
 - [33] P. A. Scarf and D. Deara, "Block Replacement Policies for a Two-Component System with Failure Dependence," *Naval Research Logistics*, Vol.50, No.1, pp.70-87, 2003.
 - [34] V. Makis, X. Jiang, and K. Cheng, "Optimal Preventive Replacement under Minimal Repair and Random Repair Cost," *Mathematics of Operations Research*, Vol.25, No.1, pp.141-156, 2000.
 - [35] S. Wu and P. Longhurst, "Optimising Age-Replacement and Extended Non-Renewing Warranty Policies in Lifecycle Costing," *International Journal of Production Economics*, Vol.130, No.2, pp.262-267, 2011.
 - [36] K. S. Park, "Optimal Number of Minimal Repairs before Replacement," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol.28, No.2, pp.137-140, 1979.
 - [37] T. Nakagawa, "Optimal Number of Failures before Replacement Time," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol.32, No.1, pp.115-116, 1983.

- [38] International Electrotechnical Commission (IEC), International Electrotechnical Vocabulary-Part192: Dependability, IEC 60050-192:2015, 2015.
- [39] 岩田浩司, 平栗滋人, 渡辺郁夫, 平尾裕司, “鉄道信号装置の目標アベイラビリティ達成のための対策決定法”, 日本信頼性学会誌, Vol.38, No.1, pp.67-74, 2016.
- [40] 尾花功, 村上孝夫, 田中保久, 生井広美, 磯修一, 小勝英明, 大泉宏, 池上正美, 松島佑太, 吉田聖彦, “アルミ低圧鋳造金型における水冷却構造部の保全時間短縮”, 日本鋳造工学学会誌, Vol.82, No.9, pp.577-582, 2010.
- [41] L. Cui and M. Xie, “Availability of a Periodically Inspected System with Random Repair or Replacement Times,” Journal of Statistical Planning and Inference, Vol.131, No.1, pp.89-100, 2005.
- [42] J. Sarkar and S. Sarkar, “Availability of a Periodically Inspected System under Perfect Repair,” Journal of Statistical Planning and Inference, Vol.91, No.1, pp.77-90, 2000.
- [43] S. Wu and D. Clements-Croome, “Optimal Maintenance Policies under Difference Operational Schedules,” IEEE Trans. on Reliability, Vol.54, No.2, pp.338-346, 2005.
- [44] 真壁肇, “信頼性における OR 的方法”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会誌, Vol.16, No.6, pp.311-325, 1972.
- [45] S. C. Albright and A. Soni, “Markovian Multiechelon Repairable Inventory System,” Naval Research Logistics, Vol.35, No.1, pp.49-61, 1988.
- [46] C. C. Sherbrooke, “METRIC: A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control,” Operations Research, Vol.16, No.1, pp.122-141, 1968.
- [47] K. Kang and S. M. Sanchez, “A Design of Experiments

- Approach to Readiness Risk Analysis,” Proc. of the 2006 Winter Simulation Conference (WSC2006), pp.1332-1339, 2006.
- [48] G. Andresen and Z. Williams, “Metrics, Key Performance Indicators, and Modeling of Long Range Aircraft Availability and Readiness,” Proc. of the NATO RTO AVT-144 Workshop on Enhanced Aircraft Platform Availability through Advanced Maintenance Concepts and Technologies, pp.7-1 to 7-12, 2011.
- [49] F. Salata and A. L. Vollaro, “Plant Reliability in Hospital Facilities,” Proc. of 68th Conference of the Italian Thermal Machines Engineering Association (ATI2013), pp.1195-1204, 2013.
- [50] M. Savsar, M. Alardhi and A. Almazrouee, “Capacity and Availability Analysis of Power Plants in Kuwait,” Proc. of the 2012 International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, (IEOM2012), pp.1598-1607, 2012.
- [51] 佐藤和一, “プロジェクト入札価格の決定問題－競争入札における見積リスクと最適入札価格について－”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会誌, Vol.62, No.7, pp.374-379, 2015.
- [52] 市川昌弘, 信頼性工学, 裳華房, 1990.
- [53] W. Kuo and M. J. Zuo, Optimal Reliability Modeling, John Wiley & Sons, Inc., 2003.
- [54] 尾崎俊治, 確率モデル入門, 朝倉書店, 1979.
- [55] S. M. Ross, Stochastic Processes, John Wiley & Sons. Inc., 1996.
- [56] 高橋陽一郎, 漸近挙動入門, 日本評論社, 2002.
- [57] J. コワリック, M. R. オスボーン, 非線形最適化問題, 培風館, 1970.
- [58] 柳浦睦憲, 茨木俊秀, 組合せ最適化, 朝倉書店, 2001.
- [59] 津田孝夫, モンテカルロ法とシミュレーション改訂版, 培

風館, 1997.

- [60] W. Y. Yun, H. W. Kim, and Y. J. Han, "Simulation-based Inspection Policies for a One-Shot System in Storage," Proc. of 5th Asia-Pacific International Symp. on Advanced Reliability and Maintenance Modeling (APARM 2012), pp.621-628, 2012.
- [61] W. Y. Yun, L. Liu, Y. J. Han, D. W. Rhee, and C. G. Han, "Simulation-based Optimal Inspection Schedules for One-Shot Systems with Two Types of Units," Proc. of International Conference on Industrial Engineering Theory, Applications and Practice (IJIE2013), pp.314-320, 2013.
- [62] W. Y. Yun, Q. Zhao, and H. W. Kim, "Optimal Inspection Schedules for One-Shot Systems in Storage with Deployment Plan," Proc. of 6th Asia-Pacific International Symp. on Advanced Reliability and Maintenance Modeling (APARM2014), pp.578-585, 2014.
- [63] W. Y. Yun, Y. J. Han, L. Liu, and H. W. Kim, "Optimal Inspection Intervals for Multi One-Shot Systems," Proc. of 6th Asia-Pacific International Symp. on Advanced Reliability and Maintenance Modeling (APARM2014), pp.578-585, 2014.
- [64] E. A. Elsayed and Y. Cheng, "Reliability Modeling and Prediction of Systems with Mixture of Units," Proc. of the 20th International Society of Science and Applied Technologies (ISSAT) International Conference on Reliability & Quality in Design, pp.268-272, 2014.
- [65] 今泉充啓, 木村充位, "サイバー攻撃を伴うシステムの最適監視方策", 電子情報通信学会信頼性研究会技術研究報告, Vol.114, No.47, R2014-3, pp.13-16, 2014.
- [66] R. G. Iverson, R. D. Fisher and R. F. Wenzel, "The Growth of a Rational, System Approach to Naval Repair Parts Inventories:

- The Introduction of Military Essentiality,” Thesis of Naval Postgraduate School, 1962.
- [67] R. H. Vogel, “Inventory Management of Shipboard Material,” Thesis of Naval Postgraduate School, 1966.
- [68] M. E. Quimby, “Upper Limits of COSAL Performance,” AD/A-110 339, US Navy Report, 1981.
- [69] J. W. Mamer and S. A. Smith, “Optimizing Field Repair Kits Based on Job Completion Rate,” *Management Science*, Vo.28. No.11, pp.1328-1333, 1982.
- [70] J. W. Mamer and A. W. Shogan, “A Constrained Capital Budgeting Problem with Applications to Repair Kit Selection,” *Management Science*, Vol.33, No.6, pp.800-806, 1987.
- [71] M. Bijvank, G. Koole and I. F. A. Vis, “Optimising a General Repair Kit Problem with a Service Constraint,” *European Journal of Operational Research*, Vol.204, No.1, pp76-85, 2010.
- [72] E. S. Suh, “Improving Product Service System Availability through Field Repair Kit Optimization,” *Proc. of East Asia Workshop on Industrial Engineering 2015 (EAWIE2015)*, pp.303-310, 2015.
- [73] R. F. Drenick, “The Failure Law of Complex Equipment,” *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol.8, No.4, pp.680-689, 1960.
- [74] F. Beichelt and K. Fischer, “General Failure Model Applied to Preventive Maintenance Policies,” *IEEE Trans. on Reliability*, Vol.29, No.1, pp.39-41, 1980.
- [75] T. Nakagawa and X. Zhao, *Maintenance Overtime Policies in Reliability Theory: Models with Random Working Cycles*, Springer, 2015.
- [76] T. Sawik, “Selection of Optimal Countermeasure Portfolio in IT

- Security Planning,” *Journal of Decision Support Systems*, Vol.55, No.1, pp.156-164, 2013.
- [77] V. Viduto, C. Maple, W. Huang and D. López-Peréz, “A Novel Risk Assessment and Optimisation Model for a Multi-Objective Network Security Countermeasure Selection Problem,” *Journal of Decision Support System*, Vol.53, No.3, pp.599-610, 2012.
- [78] C. Derman, “On Sequential Decisions and Markov Chains,” *Management Science*, Vol.9, No.1, pp.16-24, 1962.
- [79] A. Tahara and T. Nishida, “Optimal Replacement Policy for Minimal Repair Model,” *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol.18, No.3-4, pp.113-124, 1975.
- [80] S. Beattie, S. Arnold, C. Cowan, P. Wagle, C. Wright and A. Shostack, “Timing the Application of Security Patches for Optimal Uptime,” *Proc. of 16th Systems Administration Conference (LISA2002)*, pp.233-242, 2002.
- [81] H. Okamura, M. Tokuzane and T. Dohi, “Optimal Security Patch Release Timing under Non-Homogeneous Vulnerability-Discovery Processes,” *Proc. of 20th International Symposium on Software Reliability Engineering (ISSRE2009)*, pp.120-128, 2009.
- [82] H. Cavusoglu, H. Cavusoglu and J. Zhang, “Economics of Security Patch Management,” *Proc. of the 5th Workshop on the Economics of Information Security (WEIS06)*, 2006.
- [83] H. P. Bloch and K. Geitner, *Practical Machinery Management for Process Plants, Vol.2: Machinery Failure Analysis and Troubleshooting*, 2nd Edition, Gulf Publishing Company, 1994, <<http://www.barringer1.com/wdbase.htm>.> 2017年10月12日アクセス
- [84] 北川賢司, 信頼性工学入門, コロナ社, 1979.

研究業績

【学術論文】

- (1) T. Kitagawa, T. Yuge and S. Yanagi, “Optimum Maintenance Policy for a One-Shot System with Series Structure Considering Minimal Repair,” *Applied Mathematics*, Vol.6, No.2, pp.326-331, 2015.
- (2) T. Kitagawa, T. Yuge and S. Yanagi, “Optimal Maintenance Policy of a Multi-Unit One-Shot System with Minimal Repair,” *The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers (IEICE) Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol.E98-A, No.10, pp.2077-2083, 2015.
- (3) T. Kitagawa, T. Yuge and S. Yanagi, “Periodic and Non-Periodic Policies for a One-Shot System with Minimal Repair,” *Journal of Japan Industrial Management Association*, Vol.66, No.4E, pp.387-395, 2016.
- (4) T. Kitagawa, T. Yuge and S. Yanagi, “Maintenance Modeling for a System Equipped on Ship,” *The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers (IEICE) Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol.E100-A, No.2, pp.629-638, 2017.
- (5) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “管理遅延時間を伴うシステムにおける故障時刻に応じた最適修理行動の選択”, *日本信頼性学会誌*, Vol.40, No.1, pp.47-59, 2018.

【査読付プロシーディング】

- (1) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Optimal Maintenance Policy for a One-Shot System with Minimal Repair and Non-Periodic Inspection Intervals,” Proceedings of 20th International Conference on Reliability & Quality in Design (ISSAT2014), pp.198-202, Aug. 2014, Seattle.
- (2) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Non-Periodic Inspection and Replacement Policy for a Multi-Unit One-Shot System with Minimal Repair,” Proceedings of 9th International Conference on Mathematical Methods in Reliability (MMR2015), pp.782-789, Jun. 2015, Tokyo.
- (3) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Maintenance Modelling for a System on Navy Ship,” Proceedings of 2nd East Asia Workshop on Industrial Engineering (EAWIE2015), pp.193-198, Nov. 2015, Seoul.
- (4) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Optimal Maintenance Policy of Two-Unit One-Shot System with Minimal Repair,” Proceedings of 2016 International Conference on Management and Operations Research (ICMOR2016), pp.188-195, Aug. 2016, Beijing.
- (5) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Three Repair Options Depending on Failure Time for a System Equipped on Ship,” Proceedings of 10th International Conference on Mathematical Methods in Reliability (MMR2017), Submit_67, Jul. 2017, Grenoble.

- (6) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Three Repair Options Depending on Failure Time for a System with Administrative Delay,” Proceedings of 4th Asian Conference on Defense Technology (ACDT), Paper_19, Nov. 2017, Tokyo.
- (7) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Replacement Timing for a One-Shot System with Minimal Repair,” Proceedings of International Conference on Soft Computing & Mathematical Modeling (ICSCMM17), (Malaya Journal of Matematik, Vol.S, No.1, pp.84-89, 2018), Dec. 2017, Ghaziabad.

【学会発表等】

- (1) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “小修理を伴うワンショットシステムの定期点検間隔及び交換方策”, 電子情報通信学会総合大会, A-9-5, 2014 年 3 月, 新潟.
- (2) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Optimum Periodic Inspection Interval and Replacement Policies for a One-Shot System with Minimal Repair,” 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies HA-27-1, Jul. 2014, Barcelona.
- (3) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “小修理を伴うワンショットシステムの点検間隔に関する検討”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.114, No.170, R2014-21, pp.43-48, 2014 年 8 月, 函館.
- (4) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Optimum Periodic Inspection Interval and Replacement Policies for a One-Shot System with Minimal Repair,” 6th Asia-Pacific International

Symposium on Advanced Reliability and Maintenance Modeling
(APARM2014), Aug. 2014, Sapporo.

- (5) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “小修理を伴うワンショットシステムの稼働率評価法”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.114, No.379, R2014-67, pp.13-18, 2014 年 12 月, 東京.
- (6) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “小修理を伴うワンショットシステムの点検間隔及び取替時期最適化”, 電子情報通信学会総合大会 A-9-1, 2015 年 3 月, 草津.
- (7) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “小修理を伴うワンショットシステムの取替時期管理方法に関する考察”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.115, No.167, R2015-16, pp.13-17, 2015 年 7 月, むつ.
- (8) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “艦艇搭載システムの保全モデル”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.115, No.254, R2015-55, pp.21-25, 2015 年 10 月, 福岡.
- (9) T. Kitagawa, “Non-Periodic Inspection Policy for a Multi-Unit One-Shot System with Minimal Repair,” IEEE Reliability Society Japan Joint Chapter Annual Meeting and Chapter Awards, Jun. 2016, Tokyo.
- (10) T. Kitagawa, T. Yuge, and S. Yanagi, “Maintenance Modelling for a System Equipped on Ship,” 28th European Conference on Operational Research (EURO2016), Jul. 2016, Poznan.
- (11) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “船舶搭載システムの最適保全方策”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.116, No.168, R2016-18, pp.31-36, 2016 年 7 月, 小樽.

- (12) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “ランダム作業時間が事前に付与されるシステムの保全方策”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.116, No.260, R2016-44, pp.13-18, 2016 年 10 月, 那覇.
- (13) 北川智大, “ランダム作業時間に従事する船舶搭載システムの保全方策について”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会第 18 回信頼性研究会, 2016 年 12 月, 三浦.
- (14) 北川智大, “保全機会に制約のあるシステムの保全方策最適化”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 安全・安心・強靱な社会と OR 研究部会, 2017 年 2 月, 東京.
- (15) 北川智大, 弓削哲史, 柳 繁, “故障時刻に基づく最適修理行動の選択”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.117, No.62, R2017-4, pp.19-24, 2017 年 5 月, 岡山.

【受賞】

- (1) Tomohiro Kitagawa, 2015 Outstanding Young Scientist Award, IEEE Reliability Society Japan Joint Chapter, Jun. 2016.
- (2) Tomohiro Kitagawa, Best Paper Award, 2017 4th Asian Conference on Defense Technology (ACDT), Nov. 2017.

(出所の明示) 本論文の各章・節の出所を以下に明記する.

- 第 3.2 節 : 学術論文(3)
- 第 3.4 節 (近似手法 A1+B) : 学術論文(1)
- 第 3.4 節 (近似手法 A2+B) : 学術論文(2)
- 第 3.5 節 : 学術論文(3)
- 第 4 章 : 学術論文(4)
- 第 5.3 節 : 学術論文(5)